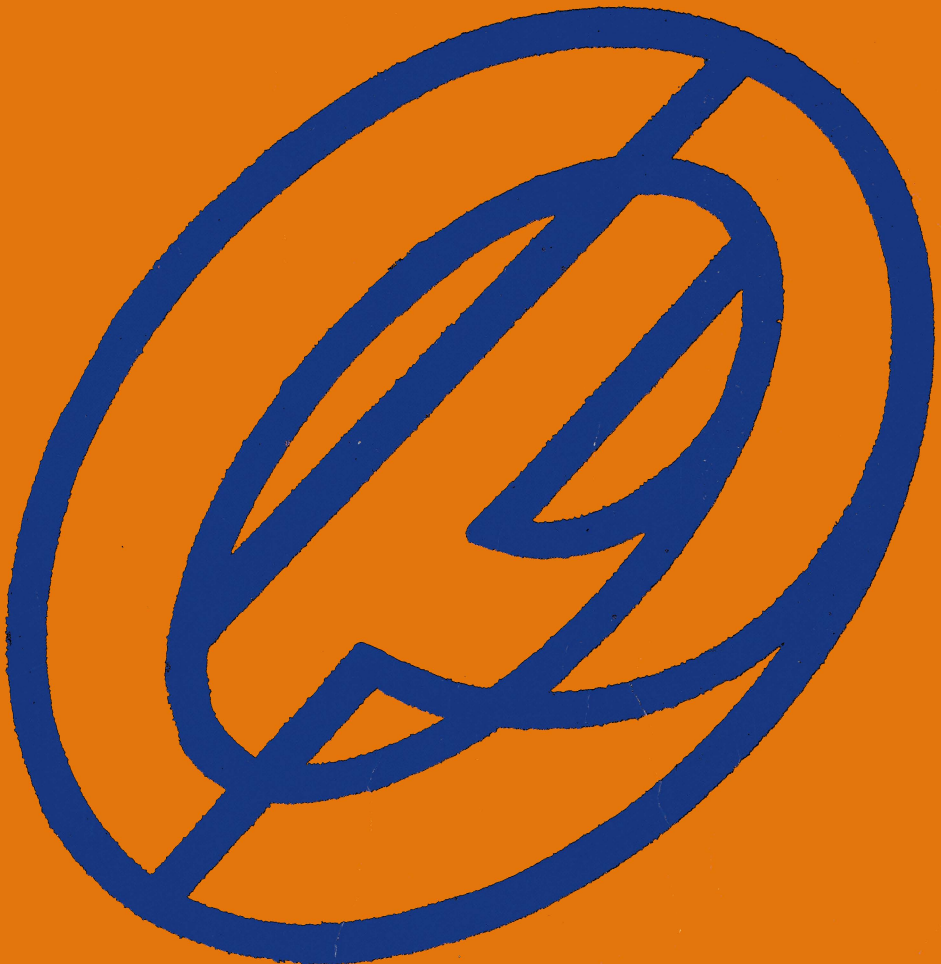


LE COURS PARTICULIER

PHYSIQUE 1

Terminales CE

150 PROBLEMES CORRIGES

DELAGRAVE

LE COURS PARTICULIER

MECANIQUE ELECTROMAGNETISME

TERMINALE CE

1

UNE VÉRITABLE SYNTHÈSE DU COURS ET DES EXERCICES EN 62 FLASHES A MÉMORISER ET 151 PROBLÈMES CORRIGÉS.
UNE PROGRESSION D'UNE TRÈS GRANDE EFFICACITÉ QUEL QUE SOIT LE NIVEAU INITIAL DE L'ÉLÈVE

DELAGRAVE
15, rue Soufflot, 75240 PARIS Cédex 05

NOTE AU LECTEUR

• *Les deux tomes MÉCANIQUE-ÉLECTROMAGNÉTISME et OSCILLATIONS-PHYSIQUE ATOMIQUE couvrent tout le programme de physique Terminale CE de 1983.*

• *La progression proposée part d'un niveau très bas, c'est-à-dire que les connaissances utiles des classes précédentes sont rappelées, exercices à l'appui.*

• *Une longue expérience nous a appris :*

— que la meilleure façon d'être simple et clair est de satisfaire votre logique, c'est-à-dire d'être rigoureux et méthodique, d'obéir à des lois bien précises et non pas de vagabonder à l'inspiration ;

— que la façon la plus efficace de présenter les connaissances est d'opérer par touches successives au fur et à mesure des besoins et non pas de faire un exposé préliminaire souvent indigeste et mal compris.

• *Guidé par une progression qui ne laisse rien dans l'ombre, qui essaie de répondre à toutes les questions que vous pourriez poser à un tuteur, vous améliorerez votre méthode de travail et vous atteindrez un bon niveau, largement suffisant pour passer les épreuves du baccalauréat.*

Il suffit que vous le vouliez et pour cela il faut jouer honnêtement le jeu : apprendre les parties à mémoriser, notées ℳ, sélectionnées en tenant compte des commentaires officiels ; s'imposer une durée de recherche suffisante ; ne pas sauter des maillons de la progression ; refaire les exercices qu'on n'a pas su résoudre seul.

Le simple fait que vous recherchiez un livre « d'exercices corrigés » signifie que vous avez la volonté de progresser, ce livre conçu avec soins vous en donne les moyens.

BOURDON Robert
professeur agrégé

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

© DELAGRAVE 1984
ISBN 2-206-00245-0

Quels exercices réviser pour le bac ?

• Insistons d'abord sur le fait qu'il faut d'abord bien comprendre tout le contenu du programme, et pour cela il est nécessaire de faire tout au long de l'année de nombreux exercices parfois assez voisins de façon à ce que l'effet répétitif porte ses fruits : LE COURS PARTICULIER a été construit dans cette optique.

• Le programme assimilé, il faut se lancer dans la « révision du bac ». Parmi les nombreux exercices couvrant la partie MÉCANIQUE-ÉLECTROMAGNÉTISME nous avons retenu le choix suivant, il est bien entendu :

— d'une part qu'il est nécessaire de réviser toutes les parties $\mathcal{M}$ qui forment un noyau irréductible représentant le minimum des connaissances nécessaires;

— d'autre part que c'est à vous de juger si un effort de révision supplémentaire s'impose sur une partie qui vous « embète » encore.

	Chapitres	Pages	Des exercices type
1	Le mouvement d'un point matériel	4	7 - 12.
2	Mouvement du centre d'inertie d'un solide	24	19 (*a*)) - 20 (*a*)) - 21 (*a*)) 23 (*a*)) - 24 - 27 - 28 - 29
3	Champ de gravitation	57	39 - 41 - 43 - 44 - 48.
4	Mouvements dans un champ de pesanteur uniforme	81	51 - 53 - 56.
5	Mouvements dans un champ électrique uniforme	98	57 - 61 - 65
6	Les condensateurs	121	68 - 70 - 71 73 (*a*)) - 75.
7	Mouvements dans un champ magnétique uniforme	137	79 - 84 - 88 - 91 93 - 95 - 97.
8	Action d'un champ magnétique sur un élément du circuit	167	99 - 100 - 103 - 107 108-111 - 113.
9	Le champ magnétique créé par un courant	198	117 - 121 - 122 123 - 124.
10	L'induction électromagnétique	213	129 - 130 - 131 - 137 138 - 140 - 141.
11	L'auto-induction	245	145 (*a*), *b*)) - 146 - 148.

1 LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

E 1. *Un mobile ponctuel se déplace par rapport à un repère d'espace* $\mathcal{R}$, *muni d'un système d'axes orthonormés* (Ox, Oy, Oz). *A tout instant de date* t, *le mobile* M *a pour coordonnées :*

$$M \begin{cases} x = 4t \\ y = 2t^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

(t *est exprimé en* s; x *et* y *en* m).

a) *Montrer que le mouvement est plan.*

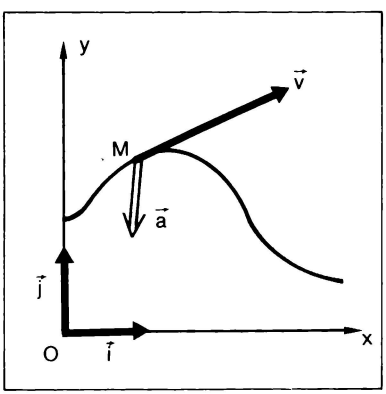
b) *Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de* M. *Tracer l'arc de trajectoire* $\overset{\frown}{AB}$ *décrit par le mobile entre* $t = 0{,}5$ s *et* $t = 2$ s.

c) *Quelle est la vitesse du mobile à la date* $t = 1{,}5$ s? *Quelle est la direction du vecteur vitesse? Dessiner ce vecteur vitesse à partir du point mobile.*

d) *Quel est le sens du déplacement du mobile entre* A *et* B?

e) *Que peut-on dire du vecteur accélération de* M?

1 Le mouvement en coordonnées cartésiennes



• Un point mobile M se déplace dans un plan muni du repère d'espace $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

• Le vecteur position de M est :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

On dit aussi que x et y sont les coordonnées de M.

• Ces coordonnées x et y sont des fonctions du temps $x = f(t)$ et $y = g(t)$, appelées les lois horaires du mouvement.

• La trajectoire de M, dans $\mathcal{R}$, a pour équation cartésienne $y = h(x)$, cette équation est obtenue en éliminant t entre les 2 lois horaires.

• Le vecteur vitesse $\vec{v}$ de M est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, on le note :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.$$

Désignons par $\dot{x}$ la dérivée f'(t) de x par rapport au temps, $\dot{y}$ celle de y. Alors : $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$.

Le vecteur vitesse, dessiné à partir du point mobile, est tangent à la trajectoire, il indique le sens du mouvement. Son module est la vitesse v du mobile, il s'exprime en $m \cdot s^{-1}$.

• Le vecteur accélération $\vec{a}$ de M est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{v}$. $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$.

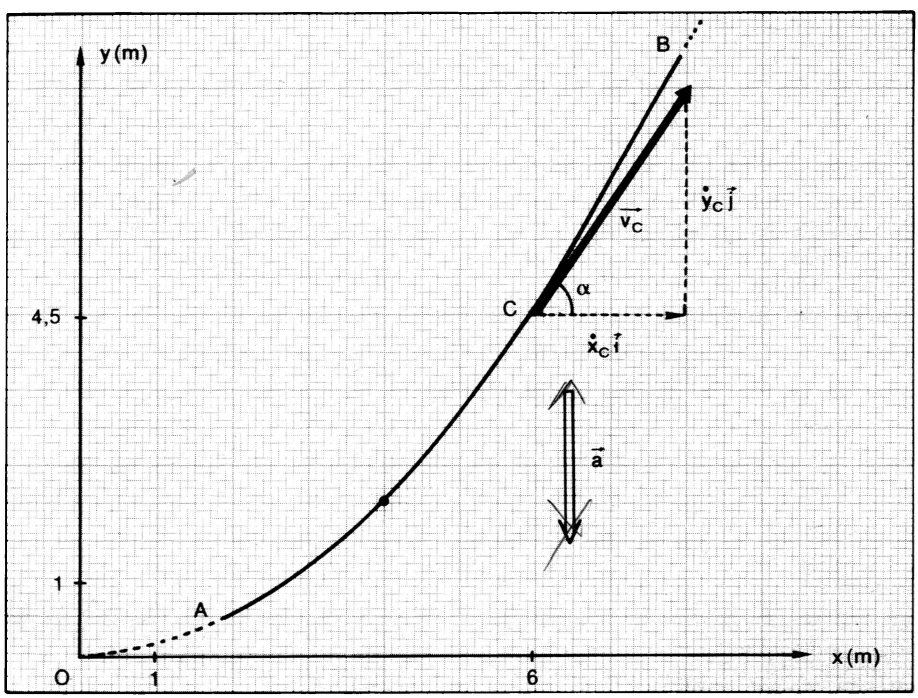
En coordonnées cartésiennes $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$.

Le module de $\vec{a}$ est l'accélération a du mobile, on l'exprime en $m \cdot s^{-2}$.

S 1. *a*) Quel que soit t, $z = 0$: le mobile reste dans le plan xOy.

b) Dans le plan xOy, l'équation cartésienne de la trajectoire est la relation $y = h(x)$, indépendante de t. On l'obtient en éliminant t entre les deux lois horaires $x = 4t$ et $y = 2t^2$: $t = \dfrac{x}{4}$ d'où $y = 2\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{8}$. C'est l'équation d'une parabole.

Ci-dessous est tracé l'arc de parabole $\overset{\frown}{AB}$ empruntée par M entre $t = 0{,}5$ s et $t = 2$ s. Pour $t = 0{,}5$ s, le mobile est en A de coordonnées $x_A = 2$ m et $y_A = 0{,}5$ m. Pour $t = 2$ s, le mobile est en B ($x_B = 8$ m; $y_B = 8$ m).



c) • Soit C la position du mobile à la date $t = 1{,}5$ s : les coordonnées de C sont $x_C = 6$ m et $y_C = 4{,}5$ m. La vitesse v_C du mobile en C est mesurée par le module du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_C}$.
Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$, à un instant t quelconque, sont :

$$\vec{v} \begin{vmatrix} \dot{x} = 4 \\ \dot{y} = 4t. \end{vmatrix}$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{v_C}$ a pour coordonnées, en $m \cdot s^{-1}$,

$$\overrightarrow{v_C} \begin{vmatrix} \dot{x}_C = 4 \\ \dot{y}_C = 6. \end{vmatrix}$$

Par suite $v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7{,}21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

• Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_C}$, dessiné à partir de la position C du point mobile, est tangent à l'arc de parabole. On peut préciser cette direction en calculant l'angle aigu α entre $\overrightarrow{v_C}$ et l'axe Ox. Comme :

$$\overrightarrow{v_C} = \dot{x}_C \vec{i} + \dot{y}_C \vec{j}$$

on en déduit (voir construction faite sur la figure, à l'échelle : $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ représenté par 5 mm) que $\text{tg } \alpha = \dfrac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C} = \dfrac{6}{4}$, d'où $\alpha = 56{,}3°$.

d) Nous savons que le vecteur vitesse indique le sens du mouvement. De A à B, les coordonnées du vecteur vitesse ($\dot{x} = 4$ et $\dot{y} = 4t$) restent positives : le vecteur vitesse est toujours orienté vers les x et les y croissants. Par suite le mobile ne change pas de sens, il parcourt l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de A vers B.

e) Le vecteur accélération $\vec{a}$ de M est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{v}$, ses coordonnées sont en $m \cdot s^{-2}$:

$$\vec{a} \begin{vmatrix} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 4. \end{vmatrix}$$

On constate que ces coordonnées ne dépendent pas du temps t, elles sont constantes. Par suite le vecteur $\vec{a}$ est constant.
Comme il est toujours le même quelle que soit la position du mobile, on le représente en général à partir d'un point quelconque situé en dehors de la trajectoire (c'est ce qui est réalisé sur la figure, échelle utilisée : $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ représenté par 5 mm).
L'accélération a de M est donc constante et égale à :

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

E 2. *Un mobile ponctuel* M *se déplace dans un plan muni d'un repère d'espace orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
A chaque instant t, $\overrightarrow{OM} = (t+2)\vec{i} + (3t^2 + 5t)\vec{j}$. (t *en* s; $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ m).

a) *Quelles sont les lois horaires du mouvement?*

b) *Quelle est l'équation cartésienne de la trajectoire de* M?

c) *Quelles sont les coordonnées du vecteur vitesse? Ce vecteur vitesse peut-il s'annuler?*

d) *Quelle est la position du mobile à la date* $t = 0$? *Quelle est alors la vitesse* v_0 *de* M? *Quel angle* $\overrightarrow{v_0}$ *fait-il avec l'axe* $(O, \vec{i})$?

e) *Montrer que le vecteur accélération de* M *est constant.*

S 2. (Solution très abrégée pour les questions a et b.)

a) $x = t + 2$ et $y = 3t^2 + 5t$.

b) $y = 3x^2 - 7x + 2$: cette équation est de la forme $y = ax^2 + bx + c$, la trajectoire est parabolique.

c) • $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{i} + (6t + 5)\vec{j}$. Ses coordonnées sont $\dot{x} = 1$ et $\dot{y} = 6t + 5$ (en $m \cdot s^{-1}$).

• La coordonnée $\dot{y} = 6t + 5$ peut s'annuler $\left(\text{pour } t = -\dfrac{5}{6}\text{ s}\right)$, mais la coordonnée $\dot{x} = 1$, restant constante, ne le peut pas. Il est donc impossible que les coordonnées soient nulles simultanément : le vecteur vitesse n'est jamais nul.

d) • La position de M à $t = 0$ est souvent appelée la position initiale, on la note M_0. On trouvera facilement $M_0 \left| \begin{matrix} x_0 = 2 \\ y_0 = 0. \end{matrix} \right.$

• La vitesse initiale $v_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = 5{,}1\ m \cdot s^{-1}$.

• L'angle $\alpha = (\vec{i}, \vec{v_0})$ est tel que $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} = 5$, d'où $\alpha = 78{,}7°$.

e) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0\vec{i} + 6\vec{j}$. Ces coordonnées sont $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y} = 6$ (en $m \cdot s^{-2}$) : elles sont constantes. Le vecteur $\vec{a}$ est donc constant. (Son module est $6\ m \cdot s^{-2}$, il est parallèle à $\vec{j}$ et de même sens.)

E 3. *Un mobile ponctuel* M *se déplace par rapport à un repère d'espace* $\mathcal{R}$ *muni d'un système d'axes orthonormés* (Ox, Oy, Oz), *l'axe* Oz *est vertical.*
A tout instant de date t, *le mobile* M *a un vecteur accélération* $\vec{a}$ *de coordonnées :*

$$\vec{a} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -10\ m \cdot s^{-2}. \end{matrix} \right.$$

L'état initial du mouvement (*c'est-à-dire à la date* $t = 0$) *est caractérisé par :*

— *la position initiale du mobile* $M_0 \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 20\ m \end{matrix} \right.$

— *la vitesse initiale du mobile* $\vec{v_0} \left| \begin{matrix} 7\ m \cdot s^{-1} \\ 0 \\ 3\ m \cdot s^{-1}. \end{matrix} \right.$

a) *Déterminer les lois horaires du mouvement.*

b) *Montrer que le mouvement est plan. Quelle est l'équation cartésienne de sa trajectoire?*

M 2 **Complément sur les intégrations.**

• On passe de x à $\dot{x}$ par dérivation par rapport au temps, inversement on dit qu'on passe de $\dot{x}$ à x par intégration.

• Si $\dot{x}=0$ quel que soit t, cela signifie que x est une constante notée C^{te} : en effet la dérivée de C^{te} redonne bien zéro :

$$\dot{x}=0 \underset{\text{dérivation}}{\overset{\text{intégration}}{\rightleftarrows}} x=C^{te}.$$

• Si $\dot{x}=\alpha$, α étant une constante donnée. Alors $x=\alpha t+C^{te}$: en effet la dérivée de x est bien α.

• Si $\dot{x}=\alpha t+\beta$, α et β étant des constantes données. Alors $x=\frac{\alpha t^2}{2}+\beta t+C^{te}$: en effet la dérivée de x est bien $\alpha t+\beta$.

• En résumé, **par intégration** par rapport au temps, on passe de :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{0} & \mathbf{à} & \mathbf{C^{te}} \\ \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{à} & \boldsymbol{\alpha t+C^{te}} \\ \boldsymbol{\alpha t+\beta} & \mathbf{à} & \boldsymbol{\frac{\alpha t^2}{2}+\beta t+C^{te}}. \end{array}$$

S 3. Les données de l'énoncé peuvent être notées, en unités internationales (sigle S.I.) :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=0\\ \ddot{z}=-10\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{OM_0}\left|\begin{array}{l}x_0=0\\ y_0=0\\ z_0=20\end{array}\right. \qquad \vec{v_0}\left|\begin{array}{l}\dot{x}_0=7\\ \dot{y}_0=0\\ \dot{z}_0=3.\end{array}\right.$$

a) • *Première loi horaire*

Quel que soit t, d'après la première coordonnée de $\vec{a}$, $\ddot{x}=0$.

Par intégration par rapport au temps on en déduit $\dot{x}=C^{te}$. Cette constante est déterminée d'après l'état initial du mouvement. En effet puisque $\dot{x}=C^{te}$ quel que soit t, cette constante ne peut être que $\dot{x}_0$, valeur de $\dot{x}$ pour $t=0$. D'où $\dot{x}=\dot{x}_0=7$.

On passe de $\dot{x}=7$ à la première loi horaire par une nouvelle intégration : $x=7t+C^{te}=7t+x_0$ (en effet pour $t=0$, la C^{te} s'identifie bien à x_0). Par suite $x=7t$ (1) (puisque $x_0=0$, voir première coordonnée de M_0).

• *Deuxième loi horaire*

Quel que soit t, $\ddot{y}=0$, d'où par intégration :

$$\dot{y}=C^{te}=\dot{y}_0=0.$$

On passe ensuite de $\dot{y}=0$ à la deuxième loi horaire :

$$y=C^{te}=y_0=0 \quad \text{soit} \quad y=0. \qquad (2)$$

• *Troisième loi horaire*

Quel que soit t, $\ddot{z}=-10$, d'où par intégration :

$$\dot{z}=-10t+C^{te}=-10t+\dot{z}_0=-10t+3.$$

Une deuxième intégration nous conduit à la troisième loi horaire :

$$z=-\frac{10t^2}{2}+3t+C^{te}=-5t^2+3t+z_0=-5t^2+3t+20. \qquad (3)$$

b) Réponses :
— le mobile reste dans le plan xOz puisque d'après la deuxième loi horaire (2) $y = 0$ quel que soit t, remarquons que ce plan est vertical puisque Oz est vertical;
— dans le plan xOz, l'équation cartésienne de la trajectoire est $z = -\frac{5x^2}{49} + \frac{3x}{7} + 20$, c'est l'équation d'une parabole.

E 4. *Un mobile ponctuel* M *se déplace par rapport à un repère d'espace* $\mathcal{R}$ *muni d'un système d'axes orthonormés* (Ox, Oy, Oz).
A un instant de date t *le vecteur vitesse de* M *a pour coordonnées :*

$$\vec{v} \begin{vmatrix} 2t-4 \\ 0 \\ 0. \end{vmatrix}$$

A l'instant $t = 0$, *le point mobile est en* O.

a) *Déterminer les lois horaires du mouvement.*

b) *Quelle est la trajectoire?*

c) *Que peut-on dire du vecteur accélération?*

S 4. *a*) • Les coordonnées de $\vec{v}$ peuvent s'écrire :

$$\vec{v} \begin{vmatrix} \dot{x} = 2t-4 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0. \end{vmatrix}$$

D'autre part la position initiale du mobile étant le point origine O : $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.
• Par intégration (revoir $\mathcal{M}$ 2) :
$\dot{x} = 2t - 4$ conduit à $x = t^2 - 4t + C^{te} = t^2 - 4t + x_0 = t^2 - 4t$;
$\dot{y} = 0$ conduit à $y = C^{te} = y_0 = 0$;
$\dot{z} = 0$ conduit à $z = C^{te} = z_0 = 0$.

b) La trajectoire est l'axe des x puisque, à tout instant, $y = 0$ et $z = 0$: le mouvement est rectiligne.

c) Le vecteur accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, par suite les coordonnées de $\vec{a}$ sont :

$$\vec{a} \begin{vmatrix} \ddot{x} = 2 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0. \end{vmatrix}$$

Le vecteur $\vec{a}$ est constant, son module est l'accélération $a = 2\ m \cdot s^{-2}$, il est parallèle à la trajectoire rectiligne et est dirigé dans le sens positif de l'axe des x.

E 5. *Un point mobile* M *décrit un arc de cercle* OA *de rayon* $R = 2{,}7$ m. *On oriente la trajectoire de* O *vers* A.
A l'instant $t = 0$, *ce mobile part de* O *avec une vitesse* v_0. *A l'instant* t, *ce mobile a pour abscisse angulaire* $s = \overset{\frown}{OM} = -0{,}6t^2 + 3t$.

a) *Quelle est la vitesse algébrique* $\bar{v}$ *de* M *à l'instant* t? *En déduire* v_0.

b) *En* A *la vitesse du mobile s'annule, déterminer l'abscisse curviligne* s_A.

c) *Déterminer le vecteur accélération de* M *à l'instant* $t = 1$ s.

3 Le mouvement en coordonnées curvilignes.

• Lorsque la trajectoire est connue à priori, elle peut servir à repérer la position du mobile, pour cela on choisit sur elle un point origine O et un sens positif.
Alors le mobile est repéré par l'abscisse curviligne :

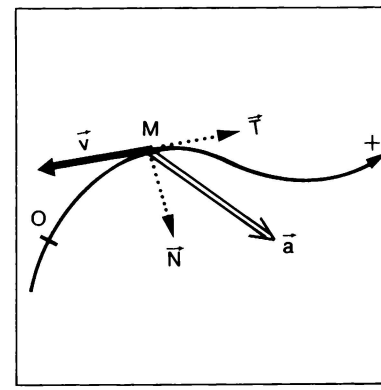
$$s = \overline{OM}.$$

La relation $s = f(t)$ est la loi horaire du mouvement.

• *La vitesse algébrique* du mouvement :

$$\bar{v} = \dot{s} = f'(t),$$

Si elle est positive c'est que le mobile chemine dans le sens positif.



• Pour caractériser les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$, on utilise deux vecteurs unitaires perpendiculaires : le vecteur unitaire tangent $\vec{T}$ orienté dans le sens +, le vecteur unitaire normal $\vec{N}$ dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.
Le vecteur $\vec{v}$, tangent à la trajectoire, ne s'exprime qu'en fonction de $\vec{T}$:

$$\vec{v} = \bar{v}\,\vec{T}.$$

Le vecteur $\vec{a}$, en désignant par R le rayon de courbure de la trajectoire a pour expression :

$$\vec{a} = \dot{\bar{v}}\,\vec{T} + \frac{v^2}{R}\,\vec{N}.$$

On pose souvent $\vec{a_T} = \dot{\bar{v}}\,\vec{T}$, $\vec{a_T}$ est le vecteur accélération tangentielle;

$\vec{a_N} = \frac{v^2}{R}\,\vec{N}$, $\vec{a_N}$ est le vecteur accélération normale, $\vec{a_N}$ est toujours dirigé vers l'intérieur de la trajectoire comme $\vec{N}$.

• Remarque sur les notations :
$\vec{v}$ désigne le vecteur vitesse;
v, que certains professeurs notent aussi $\|\vec{v}\|$, est la vitesse, nombre positif;
$\bar{v}$ est la vitesse algébrique égale à $+v$ si le mobile va dans le sens + ou bien à $-v$ s'il va dans le sens négatif.

S 5. *a)* La loi horaire du mouvement est $s = -0{,}6\,t^2 + 3t$, la vitesse algébrique $\bar{v} = \dot{s} = -1{,}2t + 3$.
La vitesse algébrique initiale s'obtient en donnant à t la valeur zéro, donc $\bar{v}_0 = 3\ m \cdot s^{-1}$, par suite la vitesse v_0 est aussi $3\ m \cdot s^{-1}$.

b) • Déterminons la date t_A à laquelle M arrive en A, alors $\bar{v} = 0$, d'où :

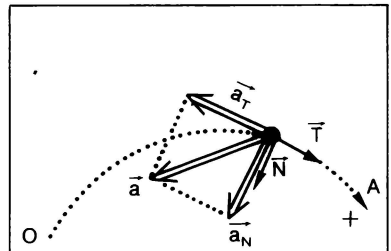
$$-1{,}2\,t_A + 3 = 0 \quad \text{soit} \quad t_A = \frac{3}{1{,}2} = 2{,}5\ s.$$

• Le mobile arrive en A à $t_A = 2{,}5$ s, donc d'après la loi horaire :

$$s_A = \overline{OA} = -0{,}6 \times (2{,}5)^2 + 3 \times 2{,}5 = 3{,}75\ m.$$

c) • Le vecteur $\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N}$ avec $\vec{a_T} = \dot{\bar{v}}\,\vec{T}$ et $\vec{a_N} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$.

• En dérivant $\bar{v} = -1{,}2t + 3$, on détermine $\dot{\bar{v}} = -1{,}2\ m \cdot s^{-2}$: le module de l'accélération tangentielle est donc $a_T = |\dot{\bar{v}}| = 1{,}2\ m \cdot s^{-2}$, le sens du vecteur $\vec{a_T}$ est opposé à celui de $\vec{T}$ puisque $\dot{\bar{v}} < 0$.
• Pour $t = 1$ s, $\bar{v} = -1{,}2 \times 1 + 3 = 1{,}8\ m \cdot s^{-1}$, par suite à cette date $\frac{v^2}{R} = \frac{1{,}8^2}{2{,}7} = 1{,}2\ m \cdot s^{-2}$: le module de l'accélération normale est donc $a_N = 1{,}2\ m \cdot s^{-2}$.
• Sur la figure ci-contre on a représenté $\vec{a_T}$, $\vec{a_N}$ et $\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N}$. Le module de $a = \sqrt{1{,}2^2 + 1{,}2^2} = 1{,}7\ m \cdot s^{-2}$.



Échelle :
1 $m \cdot s^{-2}$ représenté par 1 cm.

E 6. *Un satellite quasi ponctuel est en orbite autour de la Terre.*
Par rapport à trois axes partant du centre C de la Terre et pointant vers trois étoiles lointaines, le satellite a un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = 10^7$ m *et de centre C.*
Le satellite a une période T égale à 2 h 44 min.

a) *Quelle est la vitesse angulaire du satellite en* $rad \cdot s^{-1}$?

b) *Quelle est la vitesse curviligne du satellite?*

c) *Quelle est la distance parcourue par le satellite en* 1 min?

d) *Quel est l'angle entre les vecteurs vitesses* $\vec{v_1}$ *et* $\vec{v_2}$ *correspondant aux instants* t_1 *et* t_2 *tels que* $t_2 - t_1 = 41$ min.

e) *Que peut-on dire du vecteur accélération du satellite?*

M 4 Les mouvements uniformes.

• On dit qu'un mouvement est uniforme si la vitesse algébrique $\dot{\bar{v}}$ reste constante.

• Dans un mouvement uniforme, et uniquement dans ce cas, on peut évaluer la vitesse v en écrivant que :

$$v = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du parcours}}.$$

• Dans un mouvement uniforme, la dérivée de $\overline{v}$ est constamment nulle, l'accélération tangentielle $\vec{a_T} = \dot{\overline{v}}\,\vec{T} = \vec{0}$, donc $\vec{a} = \vec{a_N}$.

5 Le mouvement circulaire uniforme.

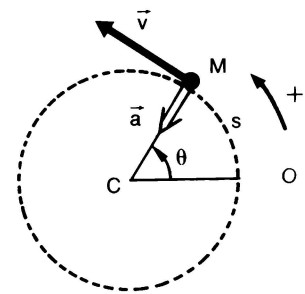
• Le point mobile M sur le cercle peut être repéré :

— par l'abscisse curviligne $s = \overset{\frown}{OM}$;

— par l'abscisse angulaire θ qui est l'angle balayé $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CM})$, θ s'exprime en radians (rad).

Ces deux abscisses sont liées par, R désignant le rayon du cercle :

$$\mathbf{s = R\theta.} \qquad (1)$$



$\vec{a}$ est centripète, de module constant $R\omega^2$ ou $\frac{v^2}{R}$.

• Les deux abscisses, curviligne et angulaire, sont des fonctions du temps : en dérivant (1) on aboutit à $\dot{s} = R\dot{\theta}$. Nous savons (revoir ℳ 3) que $\dot{s}$ représente la vitesse curviligne algébrique $\overline{v}$, de même $\dot{\theta}$ représente la vitesse angulaire algébrique $\overline{\omega}$. D'où :

$$\mathbf{\overline{v} = R\,\overline{\omega}} \quad (\overline{v} \text{ en } m \cdot s^{-1}, \overline{\omega} \text{ en } rad \cdot s^{-1}).$$

• Le mouvement circulaire est uniforme (revoir ℳ 4) si $\overline{v}$ est constant, donc si $\overline{\omega}$ est constant.

Pour un mouvement circulaire uniforme, et uniquement dans ce cas, on peut évaluer la vitesse angulaire ω en écrivant :

$$\omega = \frac{\text{angle balayé}}{\text{durée nécessaire}}.$$

Ainsi pour effectuer un tour, l'angle balayé est 2π rad, la durée nécessaire est la période T du mouvement :

$$\mathbf{T = \frac{2\pi}{\omega}}.$$

• Dans un mouvement circulaire uniforme le vecteur accélération (qui se confond avec $\vec{a_N}$ puisque $\vec{a_T} = \vec{0}$, revoir ℳ 4) est :

$\vec{a}$ { — **centripète**
— **de module constant** $\mathbf{a = \frac{v^2}{R} = R\omega^2}$.

S 6. *a*) La période T du satellite, en mouvement circulaire uniforme, est liée à la vitesse angulaire par $T=\frac{2\pi}{\omega}$, d'où :

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\times 3600+44\times 60}=6{,}385\cdot 10^{-4}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

b) Pour calculer la vitesse curviligne v, on peut :
— utiliser la relation $v=R\omega$, d'où $v=10^7\times 6{,}385\cdot 10^{-4}=6\,385\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;
— traduire que pour effectuer un tour, le mouvement étant uniforme,

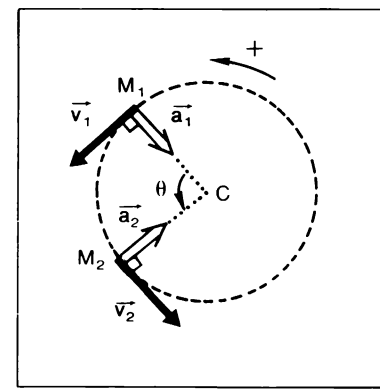
$$v=\frac{\text{distance}}{\text{durée}}=\frac{2\pi R}{T}=\frac{2\pi\cdot 10^7}{2\times 3600+44\times 60}=6\,385\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

c) Le mouvement étant uniforme, le satellite décrit en $\Delta t=1\ \text{min}=60\ \text{s}$, un arc de longueur s, telle que $s=v\cdot\Delta t=6\,385\times 60=3{,}83\cdot 10^5\ \text{m}$.

d) • Entre les dates t_1 et t_2, le mouvement de rotation étant uniforme, l'angle balayé $\theta=(\overrightarrow{CM_1},\overrightarrow{CM_2})=\omega(t_2-t_1)$, avec le sens positif choisi $\omega=\omega$, d'où :

$\theta=6{,}385\cdot 10^{-4}\times 41\times 60=$
$1{,}57\ \text{rad}=90°.$

• Le vecteur vitesse $\vec{v}_1$ est perpendiculaire à CM_1, $\vec{v}_2$ à CM_2, donc $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont perpendiculaires. (Leurs normes sont bien sûr égales puisque le mouvement est uniforme.)



e) Le vecteur accélération $\vec{a}$, dans un mouvement circulaire uniforme, est dirigé vers le centre du cercle trajectoire, ici le centre de la Terre C. Son module est constant et est égal à :

$$a=R\omega^2=10^7\times(6{,}385\cdot 10^{-4})^2$$
$$=4{,}077\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

E 7. *Un mobile ponctuel se déplace dans un plan* P. *Son vecteur accélération* $\vec{a}$ *est constamment perpendiculaire à son vecteur vitesse* $\vec{v}$ *et le module de* $\vec{a}$ *reste égal à* $32\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

a) *Montrer que le mouvement est uniforme.*

b) *Montrer que le mouvement est circulaire.*

c) *Sachant que la loi horaire du mouvement, en coordonnée angulaire, est* $\theta=4t+\frac{\pi}{2}$ (t *en* s; θ *en* rad), *quel est le rayon de la trajectoire?*

d) *Quelle est la période du mouvement?*

e) *Quelle est la vitesse curviligne du mobile?*

S 7. *a)* • En coordonnées curvilignes, le vecteur accélération a pour expression :

$$\vec{a} = \dot{\bar{v}}\,\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}.$$

Comme $\vec{a}$ est constamment perpendiculaire au vecteur vitesse porté par $\vec{T}$, il s'ensuit que la coordonnée de $\vec{a}$ suivant $\vec{T}$ est nulle quel que soit t : $\dot{\bar{v}} = 0$. Par intégration on en déduit que $\bar{v} = C^{te}$: le mouvement est uniforme.

b) Le vecteur $\vec{a}$ se réduit donc à $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$, son module est $a = \frac{v^2}{R}$. Comme a et v restent constants, cela implique que R reste constant. Un mouvement plan dont le rayon de courbure reste constant ne peut être que circulaire.

c) • La vitesse angulaire algébrique $\bar{\omega}$ n'est autre que $\dot{\theta}$, θ étant l'abscisse angulaire $\theta = 4t + \frac{\pi}{2}$.

D'où $\bar{\omega} = \dot{\theta} = 4$ rad·s^{-1}. Il est normal que cette vitesse soit constante puisque le mouvement est uniforme.

• Le module de $a = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$, d'où $R = \frac{a}{\omega^2} = \frac{32}{4^2} = 2$ m.

d) La période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = 1{,}57$ s.

e) La vitesse curviligne se déduit de la vitesse angulaire :

$$v = R\omega = 2 \times 4 = 8 \text{ m·s}^{-1}.$$

E 8. *Un mobile ponctuel* M *reste dans un plan. Il décrit par rapport au plan une trajectoire* AC *qui est un arc de cercle* AB *de rayon* R = 10 m *et un segment de droite* BC, *se raccordant en* B *tangentiellement à* AB.
Le mobile garde de A *à* C *la vitesse constante* v = 6 m·s^{-1}.

a) *Que peut-on dire du vecteur vitesse de* A *à* B? *de* B *à* C?

b) *Que peut-on dire du vecteur accélération de* A *à* B? *de* B *à* C?

6 Les mouvements rectilignes.

• Dans un mouvement rectiligne le vecteur accélération normale $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N}$ est constamment nul, car le rayon de courbure R d'une droite est infiniment grand. Retenons : **$\vec{a}_N = \vec{0}$ dans tout mouvement rectiligne.**

• Par suite $\vec{a} = \vec{a}_T$ est porté par $\vec{T}$ c'est-à-dire par la droite trajectoire. On se contente souvent de raisonner avec *l'accélération algébrique* du mouvement rectiligne défini par **$\vec{a} = \bar{a}\cdot\vec{T}$,** formule qui ressemble à celle vue dans $\mathcal{M}$ 3 à propos de la vitesse algébrique.

• En général on munit la trajectoire rectiligne d'un vecteur unitaire noté $\vec{i}$ plutôt que $\vec{T}$. Alors le mobile est repéré par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.
Comme $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} = \bar{v}\vec{i}$ (revoir ℳ 3), $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} = \bar{a}\vec{i}$.

D'où, **pour tout mouvement rectiligne $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{x}$.**

• Remarques :
— si $\vec{a}$ est orienté dans le sens positif de la trajectoire rectiligne (donc dans le sens de $\vec{i}$), l'accélération algébrique $\bar{a} = a$, a désignant l'accélération c'est-à-dire $\|\vec{a}\|$;
— si $\vec{a}$ est orienté dans le sens négatif de la trajectoire rectiligne, $\bar{a} = -a$.

ℳ 7

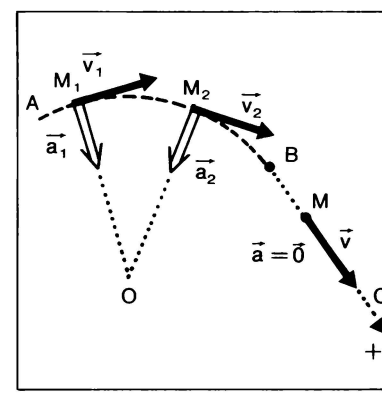
Le mouvement rectiligne uniforme.

• Le mouvement est rectiligne donc $\vec{a}_N = \vec{0}$ (voir ℳ 6), il est uniforme donc $\vec{a}_T = \vec{0}$ (voir ℳ 4), par suite le vecteur accélération **$\vec{a} = \vec{0}$.**

• Inversement si un mobile a un vecteur accélération constamment nul, il est en mouvement rectiligne et uniforme (ou au repos).

S 8. *a)* • De A à B, le mouvement est circulaire uniforme : le vecteur vitesse garde une norme v constante, il est toujours orienté conformément au sens + choisi.

• De B à C, le mouvement est rectiligne uniforme : le vecteur vitesse reste équipollent à lui-même, le vecteur vitesse est constant.



b) • De A à B, le vecteur accélération est centripète, de module constant $a_1 = a_2 = \frac{v^2}{R} = \frac{6^2}{10} = 3{,}6\ m \cdot s^{-2}$ (revoir ℳ 5).

• De B à C, le vecteur accélération est nul car le mouvement est rectiligne et uniforme (revoir ℳ 7).

E 9. *Un mobile ponctuel se déplace sur un axe* Ox. *Son vecteur accélération est constant, il est dirigé dans le sens négatif de l'axe, son module est* $a = 3\ m \cdot s^{-2}$. *A l'instant* $t = 0$, *le mobile passe par le point* M_0 *d'abscisse* $x_0 = 2$ m *et est lancé à la vitesse* $v_0 = 20\ m \cdot s^{-1}$ *dans le sens positif.*

a) *Quelle est la nature du mouvement de* M?

b) *Quelle est la loi horaire du mouvement?*

c) *A quelle date le mouvement change-t-il de sens? Où se trouve alors le mobile?*

8 Le mouvement rectiligne uniformément varié.

• Un mouvement rectiligne est uniformément varié si son accélération algébrique $\bar{a}$ reste constante, non nulle.

• En remarquant que $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{x}}$ (revoir *M* 6), et en appelant x_0 et $\bar{v_0}$ l'abscisse initiale et la vitesse algébrique initiale, on en déduit par intégration :

$$\bar{v} = \bar{a}t + \bar{v_0} \qquad (1)$$

$$x = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 + \bar{v_0}t + x_0. \qquad (2)$$

• En éliminant t entre x et $\bar{v}$, on obtient une autre relation intéressante :

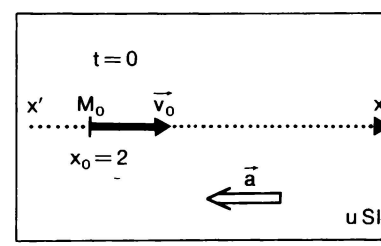
$$\bar{v}^2 - \bar{v_0}^2 = 2\bar{a}(x - x_0).$$

• Le mouvement rectiligne uniformément varié est un mouvement d'aller et retour :
— pendant l'aller la vitesse v décroît, le mouvement est *retardé*, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de sens opposés : $\bar{v}\bar{a} < 0$.
— en fin d'aller la vitesse est nulle, le mobile change de sens de propagation;
— pendant le retour la vitesse v croît, le mouvement est *accéléré*, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de même sens : $\bar{v}\bar{a} > 0$.

• *Remarque :* En faisant $\bar{a} = 0$ dans les relations (1) et (2) précédentes, on retrouve les lois du mouvement rectiligne uniforme.

S 9. Avant d'aborder la résolution d'un problème, n'hésitez pas à faire un schéma sur lequel figurent tous les renseignements donnés par l'énoncé ou vos conventions (choix de l'origine des abscisses et choix de l'origine des dates si l'énoncé n'impose pas ces origines).

a) • Sur le schéma ci-contre nous avons traduit les données de l'énoncé (les valeurs numériques sont en unités du système international : u S.I.)
— le vecteur $\vec{a}$ constant (c'est pour cela que nous l'avons mis en dehors de l'axe pour insister sur le fait qu'il est le même en tous les points), son sens est opposé au sens +;
— la position initiale du mobile M_0 d'abscisse $x_0 = 2$ m;
— le vecteur vitesse initiale partant de M_0, pointant dans le sens positif.



• Le mouvement rectiligne est uniformément varié puisque, le vecteur $\vec{a}$ restant constant, l'accélération algébrique $\bar{a}$ reste constante : elle est égale à $-a$ car $\vec{a}$ est dirigé dans le sens négatif. Numériquement $\bar{a} = -3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

b) Pour déterminer la loi horaire il faut préciser $\bar{a}$, $\overline{v_0}$ et x_0.
Nous avons vu que l'accélération algébrique $\bar{a} = -3\ m \cdot s^{-2}$, que $x_0 = 2\ m$.
Quant à la vitesse algébrique initiale $\overline{v_0} = +v_0 = 20\ m \cdot s^{-1}$ puisque le vecteur $\vec{v_0}$ est dirigé dans le sens positif.

Par suite la loi horaire s'écrit $x = -\frac{3}{2}t^2 + 20t + 2$.

c) • Le mobile change de sens de propagation lorsque la vitesse s'annule.
En dérivant la loi horaire précédente (ou bien d'après la relation $\bar{v} = \bar{a}t + \overline{v_0}$), on en déduit $\bar{v} = -3t + 20$. La vitesse s'annule pour t tel que $-3t + 20 = 0$, d'où $t = \frac{20}{3} = 6{,}67$ s.

• Le mobile, au changement de sens, se trouve alors au point d'abscisse :

$$x = -\frac{3}{2}(6{,}67)^2 + 20 \times 6{,}67 + 2 = 68{,}7\ m.$$

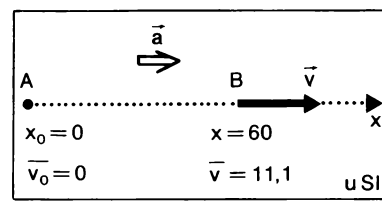
E 10. *Une voiture démarre en ligne droite, son mouvement est uniformément accéléré pendant* 20 s. *Après avoir parcouru* 60 m, *son compteur de vitesse indique* 40 $km \cdot h^{-1}$.

a) *Quelle est l'accélération de cette voiture au démarrage?*

b) *Quelle est la vitesse de la voiture,* 20 s *après le départ?*

c) *Quelle est la distance parcourue par la voiture au bout de* 20 s?

S 10. *a*) • Orientons la droite trajectoire dans le sens du mouvement, le mouvement étant uniformément accéléré, le vecteur $\vec{a}$ est constant et est dirigé dans le sens du mouvement.



• Choisissons la date origine, t = 0, pour l'instant du départ de A et prenons cette position A pour origine de l'axe des x. Alors l'état initial du mouvement est caractérisé par $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$ puisque la voiture a une vitesse nulle au départ.

• Sur le schéma ci-contre figurent ces renseignements, ainsi qu'un autre renseignement donné par l'énoncé : pour $x = 60$ m, $v = \frac{40}{3{,}6} = 11{,}1\ m \cdot s^{-1}$.

(Ne pas oublier de ramener la vitesse en unités S.I. :

$$1\ km \cdot h^{-1} = \frac{1000}{3600} = \frac{1}{3{,}6}\ m \cdot s^{-1}.)$$

• Sur le schéma nous constatons que nous connaissons deux couples $(x; \bar{v})$, il est donc recommandé d'utiliser la relation reliant x à $\bar{v}$ pour déterminer $\bar{a}$:
$\overline{v^2} - \overline{v_0^2} = 2\bar{a}(x - x_0)$.

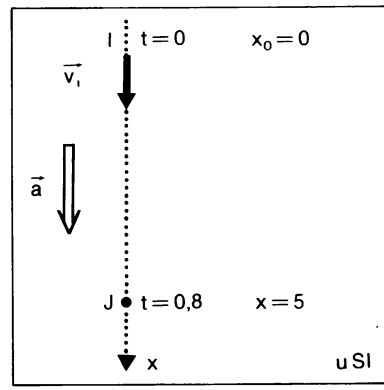
Soit
$$\bar{a} = \frac{\overline{v^2} - \overline{v_0^2}}{2(x - x_0)} = \frac{11{,}1^2 - 0^2}{2(60 - 0)} = 1{,}03\ m \cdot s^{-2}.$$

b) D'après $\bar{v} = \bar{a}\,t + \overline{v_0}$, pour $t = 20$ s, $\bar{v} = 1{,}03 \times 20 = 20{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \simeq 74\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

c) La voiture pendant ces 20 s ne change pas de sens, la distance parcourue est $|x - x_0| = \left|\frac{1}{2}\bar{a}\,t^2 + \overline{v_0}\,t\right| = \frac{1}{2} \times 1{,}03 \times 20^2 = 206$ m.

E 11. *Une pierre est en mouvement de chute verticale uniformément accélérée, d'accélération* $a = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. *Elle décrit un segment* IJ *de longueur* 5 m *en* 0,8 s. *Quelle est sa vitesse en* I?

S 11. • Orientons la trajectoire rectiligne vers le bas, c'est-à-dire dans le sens du mouvement. Le vecteur vitesse $\vec{v}_I$, en I, est orienté dans le sens du mouvement. Le mouvement étant uniformément accéléré le vecteur $\vec{a}$ est constant et est orienté dans le sens du mouvement.
Sur la figure ci-contre figurent ces renseignements ainsi que :
— nos conventions d'origine ($t = 0$ pour le passage en I; I est le point origine de l'axe des x; par suite $x_0 = 0$);
— un autre renseignement donné par l'énoncé (pour $t = 0{,}8$ s, $x = 5$ m).



• Sur le schéma nous constatons que nous connaissons deux couples (t; x), il est donc recommandé d'utiliser la loi horaire du mouvement uniformément varié :

$$x = \frac{1}{2}\bar{a}\,t^2 + \overline{v_0}\,t + x_0.$$

Le vecteur $\vec{a}$ ayant le sens positif : $\bar{a} = +a = 9{,}8\ \text{m}.\text{s}^{-2}$.
Le vecteur vitesse initiale n'est autre que $\vec{v}_I$ qui a le sens positif, d'où $\overline{v_0} = +v_I$.
Enfin nous avons vu que $x_0 = 0$, d'où la loi horaire :

$$x = 4{,}9\,t^2 + v_I\,t.$$

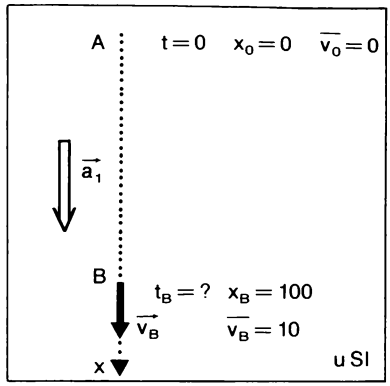
En écrivant que pour $t = 0{,}8$ s, $x = 5$ m, on en déduit v_I :

$$5 = 4{,}9 \times (0{,}8)^2 + v_I \times 0{,}8, \quad \text{d'où} \quad v_I = 2{,}33\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

E 12. *Une cage d'ascenseur descend dans un puits de mine vertical profond de* 350 m. *La cage part de* A. *Un démarrage, uniformément accéléré, l'amène en* B, *tel que* AB = 100 m, *à la vitesse* $v_B = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. *Puis le mouvement est uniforme sur un parcours* BC = 200 m. *Enfin les derniers* 50 m *sont parcourus d'un mouvement uniformément retardé jusqu'à l'arrêt en* D.
Quelle est la durée de la descente?

S 12. • Lorsqu'un mouvement ne peut pas être décrit par une loi horaire unique, il est nécessaire de le découper en phases qu'on étudiera séparément. En dehors des chocs le vecteur vitesse final d'une phase est égal au vecteur vitesse initial de la phase suivante.

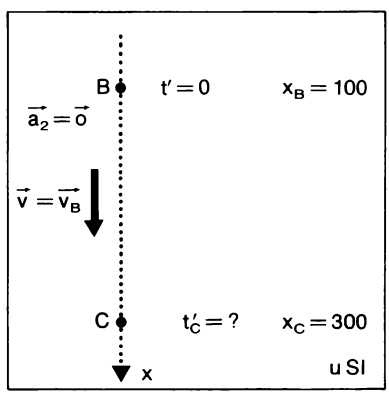
— *Première phase :* le démarrage uniformément accéléré.



• Orientons la trajectoire dans le sens du mouvement; le mouvement étant uniformément accéléré le vecteur accélération $\vec{a}_1$ a le sens du mouvement : $\overline{a_1}$ est positif.
Choisissons l'instant de départ comme origine des dates, la position de départ A comme origine de l'axe des x.
L'ascenseur partant évidemment à vitesse nulle la vitesse initiale, en A, est nulle : $\overline{v_0} = 0$.
En B nous avons noté les renseignements donnés : $x_B = 100$ m, $\overline{v_B} = 10\ m \cdot s^{-1}$.

• Sur le schéma nous constatons que nous connaissons deux couples $(x; \overline{v})$ nous permettant de déterminer $\overline{a_1}$: $\overline{v_B^2} - \overline{v_0^2} = 2\,\overline{a_1}(x_B - x_0)$ soit $\overline{a_1} = \dfrac{10^2 - 0^2}{2(100 - 0)} =$ $0{,}5\ m \cdot s^{-2}$ (on trouve bien que $\overline{a_1} > 0$ comme prévu).
• Pour déterminer la date de passage en B on peut, soit utiliser la loi horaire $x = \dfrac{0{,}5}{2} t^2$, soit la loi de vitesse $\overline{v} = 0{,}5\ t$. On trouvera facilement que $t_B = 20$ s.
La première phase dure donc 20 s.

— *Deuxième phase :* le mouvement est rectiligne uniforme.



• Le vecteur accélération est nul, le vecteur vitesse reste constant et égal au vecteur final $\vec{v}_B$ de la première phase (nous avons mis un représentant de ce vecteur constant en dehors de l'axe). Gardons le même axe des x que pour la première phase :

$$x_B = 100\ m, \quad x_C = 300\ m.$$

Prenons une nouvelle origine des dates, $t' = 0$ pour l'instant de passage en B, par suite $\overline{v_0} = \overline{v_B} = 10\ m \cdot s^{-1}$
et $x_0 = x_B = 100$ m.
• La loi du mouvement rectiligne uniforme :

$$x = \overline{v_0} t + x_0$$

s'écrit $x = 10t' + 100$. Elle permet d'en déduire la date t'_C : $300 = 10t'_C + 100$, d'où $t'_C = 20$ s. La deuxième phase dure donc 20 s.

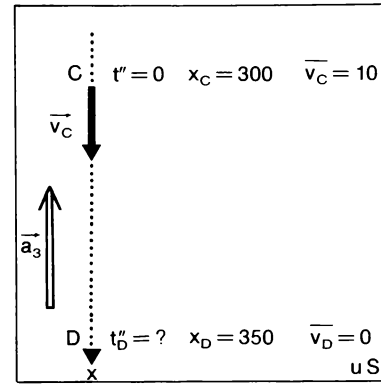
• *Remarque :* C'est pour vous entraîner à l'étude d'un mouvement uniforme que nous avons détaillé ainsi. Pour calculer la durée de la deuxième phase il suffisait d'écrire puisque le mouvement est uniforme :

$$\text{durée} = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \frac{200}{10} = 20\ s.$$

— *Troisième phase :* le freinage uniformément retardé.

• Toujours sur le même axe des x : $x_C = 300$ m, $x_D = 350$ m.
Prenons une nouvelle origine des dates, $t'' = 0$ pour l'instant de passage en C, par suite $x_0 = x_C = 300$ m et $\overline{v_0} = \overline{v_C} = 10$ m·s^{-1} (puisque la vitesse initiale de cette troisième phase est la vitesse finale de la deuxième).

• Le mouvement étant uniformément retardé, $\vec{a_3}$ a le sens opposé au mouvement, donc au sens + : $\overline{a_3} < 0$.

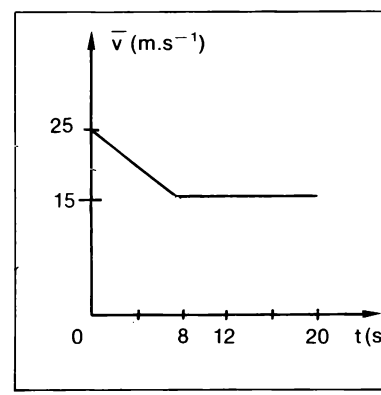


• Sur la figure ci-contre nous constatons que nous connaissons deux couples $(x; \overline{v})$ pour déterminer $\overline{a_3}$:

$$\overline{a_3} = \frac{\overline{v_D^2} - \overline{v_0^2}}{2(x_D - x_0)} = \frac{0^2 - 10^2}{2(350 - 300)} = -1 \text{ m·s}^{-2}$$

(on trouve bien que $\overline{a_3}$ est négatif).

• Pour déterminer la date d'arrêt en D, on peut utiliser la loi horaire $x = -0{,}5\,t''^2 + 10\,t'' + 300$ ou la loi de vitesse $\overline{v} = -t'' + 10$. Cette dernière conduit plus facilement à $t''_D = 10$ s. La troisième phase dure donc 10 s.
— *La durée totale* de la descente est donc 20 s + 20 s + 10 s = 50 s.



E 13. *Le diagramme des vitesses ci-contre indique comment varie la vitesse algébrique d'une voiture. Entre* t = 0 *et* t = 12 s, *la route est rectiligne. Après* t = 12 s, *la voiture est dans un virage circulaire de rayon* R = 300 m.
Étudier les 3 phases du mouvement en précisant la nature du mouvement, le vecteur accélération, la distance parcourue.

S 13. — Première phase : t est compris entre 0 et 8 s.

• Le mouvement est rectiligne.
La vitesse algébrique est fonction affine du temps : $\overline{v} = \overline{a}\,t + \overline{v_0}$, le mouvement est donc uniformément varié. L'accélération algébrique $\overline{a}$ est le coefficient directeur de la droite représentant $\overline{v}$, déterminons-le. D'une part pour $t = 0$, $\overline{v_0} = 25$ m·s^{-1}; d'autre part pour $t = 8$ s, $\overline{v} = 15$ m·s^{-1}. D'où $\overline{a} = \frac{\overline{v} - \overline{v_0}}{t} = \frac{15 - 25}{8} = -1{,}25$ m·s^{-2}.

En résumé le mouvement est rectiligne, uniformément varié. On peut même dire que le mouvement est uniformément retardé puisque $\vec{v}\,\vec{a} < 0$ (voir ℳ 8).

- Le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant, parallèle à la trajectoire, de sens opposé à celui du mouvement, de module $a = 1{,}25\ m \cdot s^{-2}$.
- En choisissant l'origine des abscisses égale à la position initiale, $x_0 = 0$. La loi horaire du mouvement est alors $x = \frac{-1{,}25}{2} t^2 + 25\,t$.

Pour $t = 8$ s, $x = \frac{-1{,}25}{2} \times 8^2 + 25 \times 8 = 160$ m. La voiture progressant toujours dans le même sens et partant de $x = 0$, $x = 160$ m représente la distance parcourue.

— Deuxième phase : t est compris entre 8 et 12 s.

- Le mouvement est rectiligne, uniforme puisque $\vec{v}$ reste constant.
- Le vecteur accélération $\vec{a}$ est constamment nul (revoir ℳ 7).
- Le mouvement étant uniforme : distance parcourue = durée × vitesse, d'où distance parcourue $= 4 \times 15 = 60$ m.

— Troisième phase : t est compris entre 12 s et 20 s.

- Le mouvement est circulaire, uniforme puisque $\vec{v}$ reste constant.
- Le vecteur accélération $\vec{a}$ est centripète (dessiné à partir du mobile, il pointe vers le centre du virage), de module constant $a = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{300} = 0{,}75\ m \cdot s^{-2}$ (revoir ℳ 5).
- Le mouvement étant uniforme : distance = durée × vitesse, soit distance parcourue $= 8 \times 15 = 120$ m.

POURQUOI ?

- *Soit* $y = f(x)$ *une fonction dérivable. Notre professeur de mathématiques note la dérivée de* y *par rapport à* x, $y' = f'(x)$, *parfois aussi* $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, *peut-on la noter* $\dot{y}$?

Non, la notation $\dot{y}$ est réservée uniquement si l'on dérive par rapport au temps : $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

(A ce propos mentionnons que dans certains énoncés la dérivée seconde de y par rapport au temps est notée aussi $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$).

• *Dans l'accélération normale* $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N}$, *il intervient le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré, qu'est-ce exactement?*

De façon simple on peut dire qu'un petit arc de courbe peut-être assimilé à un petit arc de cercle de rayon R : R est le rayon de courbure.

De façon pratique vous n'aurez à considérer des rayons de courbure que dans deux cas : pour les cercles (alors R est le rayon du cercle), pour les droites (alors R est infiniment grand).

• *Pourquoi ne met-on pas de barre sur* x *qui est une grandeur algébrique comme* a *ou* v?

• Prenons un exemple vu en mathématiques : soit deux points A et B appartenant à un axe x'x, muni d'un vecteur unitaire $\vec{i}$.
On peut parler :
— du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
— de $\overline{AB}$, mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ à l'aide du vecteur unitaire $\vec{i}$, telle que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\vec{i}$;
— de la distance $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

• De même nous n'utiliserons les barres que pour noter la mesure algébrique d'un vecteur à l'aide d'un vecteur unitaire de même direction.

Exemples :
— pour n'importe quel mouvement $\vec{v}$ et $\vec{T}$ ont même direction, on peut poser $\vec{v} = \bar{v}\vec{T}$ (revoir ℳ 3)
— pour un mouvement rectiligne $\vec{a}$ et $\vec{T}$ ont même direction, on peut poser $\vec{a} = \bar{a}\vec{T}$ (revoir ℳ 6)

• *Est-ce qu'un mouvement à vecteur accélération* $\vec{a}$ *constant est uniformément varié?*

Un mouvement rectiligne dont le vecteur $\vec{a}$ est constant est uniformément varié (alors $\bar{a} = C^{te}$).
Un mouvement parabolique dont le vecteur $\vec{a}$ est constant n'est pas uniformément varié. (A titre de documentation facultative, disons qu'il faut que l'accélération algébrique tangentielle $\bar{a}_T = \dot{\bar{v}}$ soit constante pour que le mouvement curviligne soit uniformément varié.)

• *Est-ce qu'un mouvement à vecteur vitesse* $\vec{v}$ *constant, non nul, est rectiligne uniforme?*

• Oui, nous savons que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ (revoir ℳ 1). Si $\vec{v} = \overrightarrow{C^{te}}$, la dérivée $\vec{a}$ est constamment nulle, donc le mouvement est rectiligne uniforme (revoir ℳ 7).
Profitons-en pour insister encore sur le fait suivant : si la vitesse algébrique $\bar{v}$ reste constante, tout ce qu'on peut affirmer c'est que le mouvement est uniforme et que $\vec{a}_T = \vec{0}$. Cela n'implique pas dans le cas général que $\vec{a} = \vec{0}$, le mouvement circulaire uniforme (revoir ℳ 5) en est une illustration frappante.

• *Dans certains énoncés on dit :*

ⓐ *le mouvement est rectiligne uniformément varié;*
ⓑ *le mouvement est rectiligne uniformément accéléré;*
ⓒ *le mouvement est rectiligne uniformément retardé;*

est-ce la même chose?

Le mouvement rectiligne uniformément varié comprend dans le cas général un aller retardé et un retour accéléré.

Dans l'expression ⓐ tout ce qu'on peut affirmer à priori c'est que le mouvement rectiligne à un vecteur $\vec{a}$ constant (donc une accélération algébrique $\bar{a}$ constante).

Dans l'expression ⓑ, on sait qu'on se limite au mouvement accéléré : le vecteur $\vec{a}$ constant a le sens du mouvement.

Dans l'expression ⓒ, on sait qu'on se limite au mouvement retardé : le vecteur $\vec{a}$ constant a le sens opposé au mouvement.

• *Est-ce que dans un mouvement rectiligne uniformément accéléré, l'accélération algébrique $\bar{a}$ est positive?*

Pas forcément, le mouvement est accéléré si $\bar{v}\,\bar{a} > 0$ (revoir ℳ 8), l'accélération algébrique $\bar{a}$ ne sera positive que si $\bar{v} > 0$, c'est-à-dire si on a orienté la trajectoire rectiligne dans le sens du mouvement.

• *Que faut-il dire lorsqu'on demande «préciser la nature du mouvement»?*

Il faut préciser si le mouvement est :
— rectiligne uniforme,
— rectiligne uniformément varié,
— circulaire uniforme,
— rectiligne sinusoïdal (voir tome II).

• *Quelle(s) condition(s) faut-il préciser pour indiquer qu'un point reste immobile dans un certain repère?*

Un point reste immobile si $\vec{a} = \vec{0}$ et si $\vec{v} = \vec{0}$ (ce qui revient à dire que $\vec{v} = \vec{0}$ quel que soit t).
La condition $\vec{v} = \vec{0}$ ne suffit pas (tout ce qu'on peut alors affirmer c'est que l'accélération normale, au même instant, $\vec{a_N} = \frac{v^2}{R}\vec{N} = \vec{0}$ mais l'accélération tangentielle $\vec{a_T}$, donc $\vec{a}$, peuvent ne pas être nulles).

2 MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE

E 14. *(Cet exercice a pour but de rappeler ce qu'est le centre d'inertie d'un solide.)*
Un solide est constitué de deux sphères homogènes S_1 *et* S_2, *de masses respectives* $m_1 = 0{,}2$ kg *et* $m_2 = 0{,}3$ kg, *de centres* A_1 *et* A_2. *Ces sphères sont liées rigidement par une tige* T, *de masse négligeable, passant par* A_1 *et* A_2.
La distance $A_1A_2 = 60$ cm.

a) *Où se trouve le centre d'inertie du solide* (S_1, T, S_2) ?

b) *Où s'applique la force localisée équivalente au poids de l'ensemble?*

M 9 Détermination du centre d'inertie d'un solide.

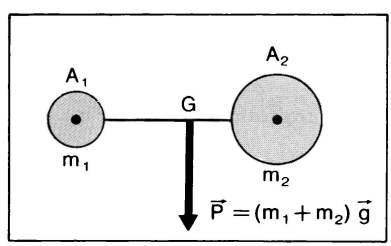
• Un solide homogène possédant un centre de symétrie (sphère, cube, ...) a son centre d'inertie G confondu avec ce centre de symétrie.

• Un solide composite constitué de deux solides de centres d'inertie G_1 et G_2, de masses respectives m_1 et m_2, a son centre d'inertie déterminé par la relation du barycentre :

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2}$$

(Dans cette relation O désigne un point origine dont le choix peut être quelconque.)
Le point G ainsi défini est sur le segment G_1G_2, plus près du centre d'inertie du solide le plus lourd.

S 14. *a)* • La sphère S_1 est homogène, son centre A_1 est donc son centre d'inertie; de même A_2 est le centre d'inertie de S_2.



• Appliquons la relation du barycentre, en prenant le point origine en A_1 :

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{A_1G} = m_1\overrightarrow{A_1A_1} + m_2\overrightarrow{A_1A_2}.$$

D'où

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{A_1G} = m_2\overrightarrow{A_1A_2},$$

soit

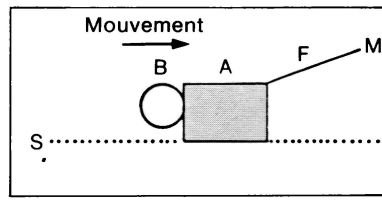
$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{A_1A_2}.$$

En module $A_1G = \dfrac{m_2}{m_1+m_2} A_1A_2 = \dfrac{0{,}3}{0{,}2+0{,}3} \times 0{,}6 = 0{,}36$ m.

Le centre d'inertie G de l'ensemble est donc à 0,36 m de A_1, sur A_1A_2.

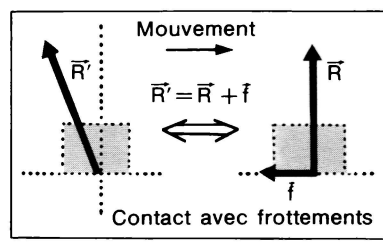
b) La force localisée, équivalente au poids $\vec{P} = (m_1+m_2)\vec{g}$ de l'ensemble, s'applique au centre d'inertie G déterminé ci-dessus. (Nous découvrons ainsi l'une des premières propriétés du centre d'inertie, appelé aussi, pour cette raison, centre de gravité.)

E 15. *(Cet exercice a pour but de rappeler quelques notions sur les forces.)*
Une bille en fer, B, *est collée à un aimant* A.
Ce dernier, tiré par un fil F *relié à la main* M *d'un observateur, glisse avec frottement sur un support* S.
Faire l'inventaire des forces extérieures (en précisant les auteurs de ces forces) agissant sur :
— *la bille* B,
— *l'aimant* A,
— *le système* (A, B).



10 **Force de contact entre deux solides.**

• Un bloc glisse avec frottement sur un plan. L'action du plan sur le bloc est caractérisée :
— soit par une force unique $\vec{R'}$, inclinée par rapport à la normale au plan à contre-sens du mouvement;
— soit par deux forces, la *réaction* $\vec{R}$ normale au plan, la *force de frottement* $\vec{f}$, parallèle au plan, de sens opposé à celui du mouvement. Nous utiliserons de préférence cette dernière représentation.



• Lorsque le bloc glisse sans frottement, l'action du support se réduit à la réaction $\vec{R}$ normale à la surface de contact (en d'autres termes $\vec{f} = \vec{0}$).

S 15. • La bille B est soumise :
— à son poids $\overrightarrow{P_B}$, vertical, vers le bas, dû à la Terre;
— à la force $\overrightarrow{F_{A/B}}$ due à l'aimant A.
• L'aimant A est soumis :
— à son poids $\overrightarrow{P_A}$ dû à la Terre;
— à la tension $\vec{\mathcal{C}}$ du fil, parallèle au fil, de sens A vers M;
— à la force $\overrightarrow{F_{B/A}}$ due à la bille (cette force est la force réciproque de $\overrightarrow{F_{A/B}}$: $\overrightarrow{F_{B/A}} = -\overrightarrow{F_{A/B}}$);

— à la réaction $\vec{R}$ due au support, normale à ce support;
— à la force de frottement $\vec{f}$ due au support, parallèle à ce support, de sens opposé à celui du mouvement.
• Le système (A, B) est soumis aux forces extérieures $\vec{P_A}$, $\vec{P_B}$, $\vec{\mathcal{C}}$, $\vec{R}$ et $\vec{f}$ dues aux objets Terre, fil, support, extérieurs au système.
(Remarquons que les forces $\vec{F_{A/B}}$ et $\vec{F_{B/A}}$ sont des forces intérieures au système car elles sont dues à l'action d'une partie du système sur une autre partie du système.)
• *Conclusion.* Il est très important de préciser, avant toute étude, le système étudié : ce choix conditionne le bilan des forces extérieures à considérer.

E 16. *(Cet exercice a pour but de rappeler les définitions de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique d'un solide.)*

a) *Une brique de masse* $m = 3$ kg *est en mouvement de translation par rapport à la Terre. Quelle est sa quantité de mouvement et son énergie cinétique lorsque sa vitesse est* $v = 5\ m \cdot s^{-1}$ *?*

b) *Une roue de masse* $m' = 10$ kg *est en mouvement de rotation autour d'un axe* Δ *passant par son centre d'inertie* G. *Sa masse est* $m = 10$ kg, *son moment d'inertie par rapport à* Δ *est* $J_\Delta = 0{,}9\ kg \cdot m^2$. *L'axe* Δ *est fixe par rapport à la Terre, la roue tourne à* $N = 2\ tr \cdot s^{-1}$. *Quelle est sa quantité de mouvement et son énergie cinétique?*

c) *Deux électrons sont lancés, par rapport à la Terre, l'un à la vitesse* $v_1 = 10^4\ km \cdot s^{-1}$, *l'autre à la vitesse* $v_2 = 10^5\ km \cdot s^{-1}$. *Calculez, quand vous le pouvez, leur quantité de mouvement et leur énergie cinétique. La masse d'un électron est* $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

11 **Quantité de mouvement et énergie cinétique d'un solide.**

• Les mobiles, tant que leur vitesse v reste très inférieure à la célérité c de la lumière dans le vide, obéissent aux lois de la mécanique newtonienne.

$\left(\text{De façon pratique pour } v < \frac{c}{10} \text{ avec } c = 3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}.\right)$

• En mécanique newtonienne, la quantité de mouvement, par rapport à un repère d'espace $\mathcal{R}$, :
— d'un point matériel est $\vec{p} = m\vec{v}$;
— d'un solide est $\boldsymbol{\vec{p} = m\vec{v}_G}$, $\vec{v}_G$ désignant le vecteur vitesse du centre d'inertie G.

• En mécanique newtonienne, l'énergie cinétique, par rapport à un repère d'espace $\mathcal{R}$, :

— d'un point matériel de trajectoire quelconque est $E_c = \frac{1}{2} mv^2$;

— d'un solide en translation est $\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2} mv^2}$;

— d'un solide en rotation, autour d'un axe Δ fixe dans $\mathcal{R}$, est $\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$ (J_Δ est le moment d'inertie du solide par rapport à Δ).

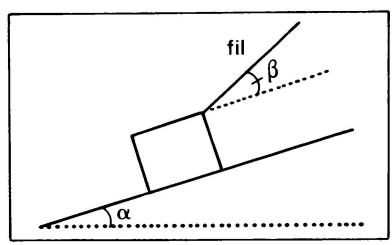
• Pour l'instant nous n'utiliserons que les lois de la mécanique newtonienne.

S 16. *a)* • La quantité de mouvement de la brique, par rapport à la Terre, est $\vec{p} = m\vec{v_G}$ de module $p = m v_G$. La brique étant en translation, tous ses points ont même vecteur vitesse : v_G est égale à la vitesse de l'ensemble v.
D'où $p = mv = 15\ kg \cdot m \cdot s^{-1}$.
• L'énergie cinétique de la brique en translation, par rapport à la Terre, est $E_c = \frac{1}{2} mv^2 = 37{,}5\ J$.

b) • Le centre d'inertie G de la roue, qui reste sur l'axe Δ fixe, est immobile : sa quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v_G} = \vec{0}$.
• L'énergie cinétique de la roue est $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ avec $\omega = 2\pi N$
d'où $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta 4\pi^2 N^2 = 71\ J$.

c) • La vitesse $v_1 = 10^4\ km \cdot s^{-1} = 10^7\ m \cdot s^{-1}$ est inférieure à $\frac{c}{10} = 3 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-1}$: l'électron 1 obéit aux lois de la mécanique newtonienne, on dit aussi qu'il n'est pas relativiste. Sa quantité de mouvement est $p_1 = mv_1 = 9{,}1 \cdot 10^{-24}\ kg \cdot m \cdot s^{-1}$.
Son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2} mv_1^2 = 4{,}55 \cdot 10^{-17}\ J$.
• L'électron 2, de vitesse $v_2 = 10^8\ m \cdot s^{-1}$ supérieure à $\frac{c}{10}$, n'obéit plus aux lois de la mécanique newtonienne : il est relativiste. Les expressions précédentes ne conviennent plus pour évaluer sa quantité de mouvement et son énergie cinétique.

E 17. *(Cet exercice a pour but de rappeler comment exploiter une égalité vectorielle.) Un mobile autoporteur de masse* $m = 770\ g$ *repose sur un plan incliné de* $\alpha = 10°$ *par rapport à l'horizontale. Il est maintenu en équilibre grâce à un fil faisant l'angle* β *avec la ligne de plus grande pente du plan,* $\beta = 20°$. $g = 9{,}81\ N \cdot kg^{-1}$.
(Le contact mobile-plan par l'intermédiaire du coussin d'air est sans frottement.) Calculer la tension $\mathcal{T}$ *du fil.*

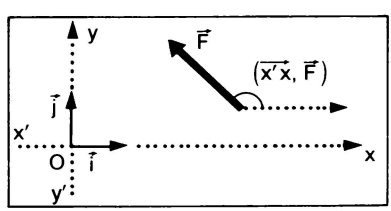


M 12 **Coordonnées d'un vecteur.**

• Soit un vecteur $\vec{F}$ du plan xOy :

$$\vec{F} = \overline{F_x}\vec{i} + \overline{F_y}\vec{j}. \qquad (1)$$

Dans cette expression $\overline{F_x}$ s'appelle la coordonnée de $\vec{F}$ suivant x'x; $\overline{F_y}$ la coordonnée suivant y'y.



• Multiplions scalairement (1) par le vecteur unitaire $\vec{i}$:

$$\vec{F}\cdot\vec{i} = \overline{F_x}\cdot\vec{i}^2 + \overline{F_y}\vec{j}\cdot\vec{i}.$$

En remarquant que $\vec{i}^2 = 1$ et $\vec{j}\cdot\vec{i} = 0$, il s'ensuit :

$$\vec{F}\cdot\vec{i} = \overline{F_x}. \qquad (2)$$

• Rappelons que le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

• L'expression (2) s'écrit alors $\overline{F_x} = \|\vec{F}\|\cdot\|\vec{i}\|\cdot\cos(\vec{F}, \vec{i})$, soit comme $\cos(\vec{F}, \vec{i}) = \cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{F})$:

$$\boldsymbol{\overline{F_x} = F\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{F})}.$$

(F désignant la norme ou le module de $\vec{F}$.)

• *Notes* — La coordonnée fait, dans un premier temps, intervenir un cosinus, cependant après simplification la fonction sinus peut s'introduire. Rappelons que, α étant exprimé en degrés, :

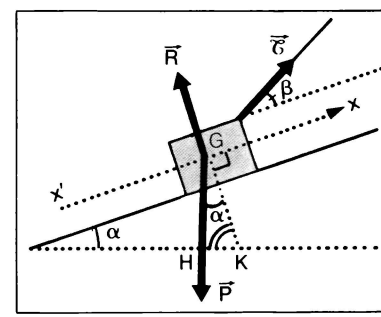
si $(\overrightarrow{x'x}, \vec{F}) = 90° - \alpha$ alors $\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{F}) = \sin\alpha$

si $(\overrightarrow{x'x}, \vec{F}) = 90° + \alpha$ alors $\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{F}) = -\sin\alpha$

si $(\overrightarrow{x'x}, \vec{F}) = 180° - \alpha$ alors $\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{F}) = -\cos\alpha$.

— Sur nos figures, si α est noté par un trait, son complémentaire $(90° - \alpha)$ sera noté par deux traits : cette façon de nommer les angles est très pratique.

S 17. • Le mobile autoporteur est soumis à :
— son poids $\vec{P}$ vertical, dû à la Terre;
— la réaction $\vec{R}$ due au coussin d'air, perpendiculaire au plan;
— la tension $\vec{\mathcal{T}}$ du fil.



• Dans un repère terrestre (c'est-à-dire lié à la Terre), le mobile est en équilibre.

Par suite $\vec{P} + \vec{R} + \vec{\mathcal{T}} = \vec{0}$.

• Considérons les coordonnées de ces vecteurs sur l'axe x'x, parallèle au plan dirigé vers le haut :

$$\overline{P_x} + \overline{R_x} + \overline{\mathcal{T}_x} = 0. \qquad (1)$$

$\overline{P_x} = P\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{P})$, l'angle $(\overrightarrow{x'x}, \vec{P}) = 90° + \alpha$. (En effet dans le triangle GHK, rectangle en H, on retrouve en K l'angle complémentaire de α noté par 2 traits, l'angle en G est donc α et l'angle entre $\overrightarrow{x'x}$ et $\vec{P}$ est $90° + \alpha$.) Par suite (revoir « Notes » de $\mathcal{M}$ 12) $\overline{P_x} = -P\sin\alpha$.

$\overline{R_x} = 0$ car $\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{R}) = \cos 90° = 0$

$\overline{\mathcal{T}_x} = \mathcal{T}\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}\cos\beta$.

L'égalité (1) devient : $\quad -P\sin\alpha + 0 + \mathcal{T}\cos\beta = 0$.

D'où $$\mathcal{C} = \frac{P \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{mg \sin \alpha}{\cos \beta}.$$

• Application numérique : $\mathcal{C} = \dfrac{0{,}770 \times 9{,}81 \times \sin 10°}{\cos 20°} = 1{,}4$ N.

E 18. *Un skieur de masse totale* 72 kg *(skis et équipement compris) descend le long d'une ligne de plus grande pente, une piste inclinée de* $\alpha = 28°$ *sur l'horizontale. On prendra* $g = 9{,}80\ m \cdot s^{-2}$.

a) *Sa vitesse constante* $\vec{v}$ *a pour module* $v = 18\ m \cdot s^{-1}$. *Calculer sa quantité de mouvement. Déterminer la somme vectorielle des forces qui lui sont appliquées.*

b) *Brusquement, le skieur met ses skis perpendiculaires à la ligne de plus grande pente, et dérape en agissant fortement sur ses carres pour mordre la neige. Sa vitesse passe de* $\vec{v}$ *à* $\vec{0}$ *pendant l'intervalle de temps* Δt. *Exprimer la variation de sa quantité de mouvement* $\Delta \vec{p}$.
En déduire l'expression de la somme vectorielle des forces appliquées au skieur lors de ce freinage brusque.

(*On considérera que* Δt *est suffisamment petit pour assimiler* $\dfrac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ *et* $\dfrac{d\vec{p}}{dt}$.)

c) *Faire l'inventaire des forces appliquées au skieur pendant cet intervalle de temps* Δt, *en respectant les conventions suivantes :*
— *On néglige la résistance de l'air.*
— *L'action de la piste sur les skis est modélisée par deux vecteurs,* $\vec{R}$ *perpendiculaire à la piste et* $\vec{f}$ *force de frottement de la neige, telle que* $(\vec{f}, \vec{v}) = 180°$. *Calculer l'intensité de la force* $\vec{f}$ *si* $\Delta t = 1{,}25$ s.

d) *On pose* $\vec{R'} = \vec{R} + \vec{f}$. *Calculer* R'. *En déduire l'action des skis sur la piste. Que pensez-vous de l'ordre de grandeur de son intensité?*

(D'après bac)

13 **La relation fondamentale de la dynamique.**

• Un solide est soumis à des forces extérieures, soit $\Sigma \vec{F}$ leur somme vectorielle à la date t. Au même instant la quantité de mouvement du solide est $\vec{p}$, par rapport à un repère d'espace donné.

• Si le repère d'espace est bien choisi, on dit alors qu'il est **galiléen,** la relation fondamentale suivante est vérifiée à tout instant :

$$\boldsymbol{\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}.$$

• De façon pratique, nous utiliserons deux repères d'espace quasi galiléens :
— un repère lié à la Terre qui peut être considéré comme galiléen dans de nombreuses expériences de durée assez faible;
— un repère géocentrique (défini par trois axes partant du centre de la Terre et pointant vers trois étoiles lointaines) nécessaire pour étudier le mouvement des satellites terrestres.

S 18. *a*) Dans un repère lié à la Terre, pratiquement galiléen, la relation fondamentale de la dynamique relie $\Sigma\vec{F}$, que l'on cherche, à la dérivée de la quantité de mouvement $\vec{p}$ du skieur :

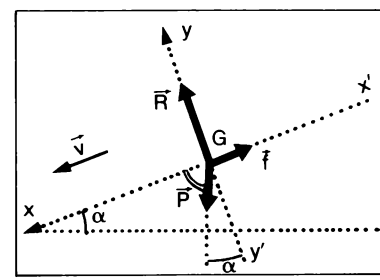
$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (1)$$

Le skieur, supposé en translation à vitesse $\vec{v}$, a une quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, constante puisque $\vec{v}$ est constant. Par suite $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ et, d'après (1), $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$.
(Nous retrouvons un résultat dégagé en Seconde : si les forces appliquées à un solide se compensent, la quantité de mouvement de ce solide est constante, et inversement.)

b) Dans un repère lié à la Terre, la quantité de mouvement du skieur, lors de ce freinage, passe de $m\vec{v}$ à $\vec{0}$: elle varie de $\vec{0} - m\vec{v} = -m\vec{v}$.
Le repère étant pratiquement galiléen, la somme des forces appliquées au skieur $\Sigma\vec{F}$, est telle que :

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \simeq \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \simeq -\frac{m\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (2)$$

c) • Le skieur est soumis :
— à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, dû à la Terre;
— à la réaction de la piste $\vec{R}$, perpendiculaire à la piste (donc à x'x, droite passant par le centre d'inertie du skieur, parallèle à une ligne de plus grande pente de la piste);
— à la force de frottement $\vec{f}$ due à la piste, parallèle à $\vec{v}$ (donc à x'x), de sens opposé à $\vec{v}$.



• Dans un repère lié à la Terre, pratiquement galiléen, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit (voir (2) ci-dessus) :

$$\Sigma\vec{F} = -\frac{m\vec{v}}{\Delta t} \quad \text{soit} \quad \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \frac{-m}{\Delta t}\vec{v}. \qquad (3)$$

• Considérons les coordonnées de (3) sur x'x (on dit aussi « projetons l'égalité vectorielle (3) sur x'x ») :

$$\overline{P_x} + \overline{R_x} + \overline{f_x} = \frac{-m}{\Delta t}\overline{v_x}.$$

$\overline{P_x} = P\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{P}) = P\cos(90° - \alpha) = P\sin\alpha$ (revoir « Notes » du $\mathcal{M}$ 12).
$\overline{R_x} = R\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{R}) = R\cos 90° = 0.$
$\overline{f_x} = f\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{f}) = f\cos 180° = -f.$
$\overline{v_x} = v\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{v}) = v\cos 0° = v.$

D'où $$P\sin\alpha + 0 - f = \frac{-m}{\Delta t}v;$$

c'est-à-dire $f = P \sin \alpha + \frac{m}{\Delta t} v$.

• Application numérique : $f = 72 \times 9{,}8 \times \sin 28° + \frac{72}{1{,}25} \times 18 \simeq 1370$ N.

d) • Évaluons R, en projetant l'égalité vectorielle (3) sur l'axe y'y, de mêmes direction et sens que $\vec{R}$.

$$\overline{P_y} + \overline{R_y} + \overline{f_y} = \frac{-m}{\Delta t} \overline{v_y}.$$

$\overline{P_y} = P \cos(\overrightarrow{y'y}, \vec{P}) = P \cos(180° - \alpha) = -P \cos \alpha$.

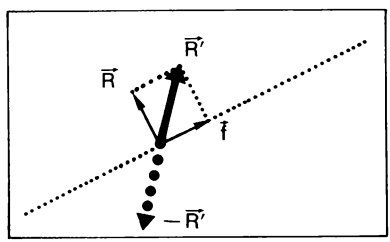
$\overline{R_y} = R \cos(\overrightarrow{y'y}, \vec{R}) = R \cos 0° = R$.

$\overline{f_y} = f \cos(\overrightarrow{y'y}, \vec{f}) = f \cos 90° = 0$.

$\overline{v_y} = v \cos(\overrightarrow{y'y}, \vec{v}) = v \cos 90° = 0$.

D'où $-P \cos \alpha + R = 0$: $R = P \cos \alpha = 72 \times 9{,}8 \times \cos 28° = 623$ N.

• Comme $\vec{R'} = \vec{R} + \vec{f}$ et $\vec{R} \perp \vec{f}$, il s'ensuit d'après le théorème de Pythagore que $R'^2 = R^2 + f^2$.
Numériquement :
$R' = \sqrt{R^2 + f^2} = \sqrt{623^2 + 1370^2} \simeq 1500$ N.



• $\vec{R'}$ est l'action de la piste sur les skis, on peut la noter : $\vec{R'} = \vec{F}_{\text{piste/skis}}$. La force réciproque de $\vec{R'}$ est $\vec{F}_{\text{skis/piste}}$, cette force est égale à $-\vec{R'}$: elle a même direction que $\vec{R'}$, même module 1500 N, mais un sens opposé.
La force $-\vec{R'}$ donne une idée de la force que doivent exercer les jambes du skieur. L'intensité de $-\vec{R'}$, $R' = 1500$ N, est à peu près deux fois plus grande que celle du poids, $P = mg = 72 \times 9{,}8 = 706$ N, du skieur.

E 19. *Un solide supposé ponctuel de masse* m = 0,10 kg *glisse le long de la ligne de plus grande pente* AB *d'un plan incliné faisant un angle* $\alpha = 20°$ *avec le plan horizontal, le point* A *est plus haut que* B.

a) *Le solide est abandonné en* A *sans vitesse initiale.*

α) *En considérant les frottements négligeables, déterminez la nature du mouvement du solide et calculez la durée du parcours* AB. *Application numérique* AB = 2,0 m.

β) *En réalité cette durée est égale à* 1,3 s. *En admettant l'existence d'une force de frottement* $\vec{f}$ *constante, de sens opposé au mouvement, déterminez la valeur de cette force de frottement.*

b) *Le mobile est maintenant lancé de* B *vers* A. *Lors de son passage en* B, *sa vitesse est égale à* 3,0 $m \cdot s^{-1}$. *Déterminez la position du point* C *où la vitesse du mobile s'annule. On supposera que la force de frottement est constamment égale à* 0,10 N.
On donne $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

(D'après bac)

14 Le théorème du centre d'inertie.

• **Dans un repère galiléen** $\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, **dans le domaine de la mécanique newtonienne** la quantité de mouvement du solide est $\vec{p} = m\vec{v_G}$, d'où $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v_G}}{dt} = m\vec{a_G}$ ($\vec{a_G}$ étant le vecteur accélération du centre d'inertie). Par suite, on obtient le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a_G}.$$

• Si le solide est ponctuel ou si le solide est en translation, $\vec{a_G}$ se confond avec l'accélération du solide $\vec{a}$, le théorème s'écrit $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$.

• Si $\vec{a_G} = \vec{0} \iff \Sigma\vec{F} = \vec{0}$: le mouvement de G est rectiligne et uniforme (revoir ℳ 7), on retrouve le « principe d'inertie ».

15 Comment utiliser le théorème du centre d'inertie.

• D'abord préciser le système considéré.

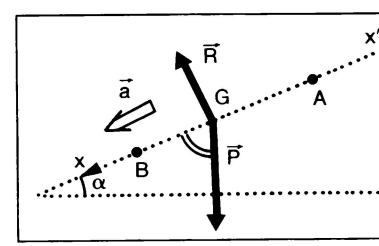
• Choisir un repère galiléen (ou presque galiléen).

• Dresser le bilan des forces extérieures agissant sur le système.

• Présenter le vecteur $\vec{a_G}$:
— par exemple $\vec{a_G}$ est parallèle à la trajectoire si le mouvement de G est rectiligne (revoir ℳ 6);
— par exemple $\vec{a_G}$ est centripète de module constant $a_G = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$ si le mouvement de G est circulaire uniforme (revoir ℳ 5).

• Écrire le théorème du centre d'inertie et l'exploiter par une ou des projections. (Dans le cas particulier où l'on sait à priori que G a un mouvement rectiligne repéré suivant un axe x'x, il est conseillé de projeter sur cet axe de façon à faire intervenir l'accélération algébrique a_G.)

S 19. *a*) α) • Le système est le solide.
• Le repère est lié à la Terre, il est pratiquement galiléen.
• Le solide est soumis :
— à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dû à la Terre;
— à l'action du plan incliné qui se réduit à la réaction $\vec{R}$, perpendiculaire au plan, puisque les frottements sont négligeables.



• Le solide ponctuel glisse le long de AB, repérons sa position sur l'axe x'x d'origine A. Le vecteur accélération $\vec{a}$ du solide est parallèle à x'x.

• D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}.$$

• Projetons sur l'axe trajectoire x'x :

$$\overline{P_x} + \overline{R_x} = m\overline{a_x}$$

$\overline{P_x} = P\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{P}) = P\cos(90° - \alpha) = mg\sin\alpha$

$\overline{R_x} = R\cos(\overrightarrow{x'x}, \vec{R}) = R\cos 90° = 0.$

Quant à $\overline{a_x}$ ce n'est autre que l'accélération algébrique $\bar{a}$ suivant x'x.

D'où $$mg\sin\alpha = m\bar{a},$$

soit $\bar{a} = g\sin\alpha$ (on trouve que $\bar{a}$ est positif, le vecteur accélération est de sens A vers B, c'était évident à priori).

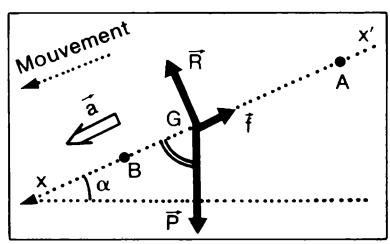
• Le mouvement rectiligne ayant une accélération algébrique constante est uniformément varié (revoir ℳ 8).

• La loi horaire du mouvement est $x = \frac{1}{2}\bar{a}\,t^2 + \overline{v_0}\,t + x_0$. Choisissons la date $t = 0$ pour l'instant de départ du point origine A, alors $x_0 = 0$.
De plus comme le mobile part de A à vitesse nulle, $\overline{v_0} = 0$.

Par suite $x = \frac{1}{2}g \cdot \sin\alpha \cdot t^2$. Pour arriver en B, d'abscisse $x_B = AB$, le mobile met le temps $t = \sqrt{\frac{2 \cdot AB}{g \cdot \sin\alpha}}$.

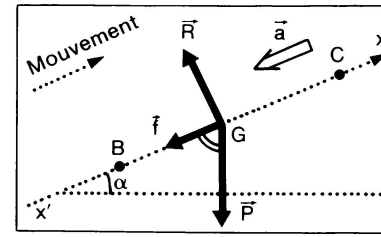
• Application numérique $t = \sqrt{\frac{2 \times 2{,}0}{9{,}8 \times \sin 20°}} = 1{,}1$ s.

β) • Le système est le solide.



• Le repère lié à la Terre est quasi galiléen.
• Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ du plan, à la force de frottement $\vec{f}$.
• Le vecteur accélération est parallèle à l'axe trajectoire x'x.
• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{f} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$.
• Projetons sur x'x, on obtient $-f + P\sin\alpha = m\bar{a}$ (1). Comme f, m, g et $\sin\alpha$ sont constants, l'accélération algébrique $\bar{a}$ du mouvement rectiligne est constante : le mouvement est uniformément varié.
• On peut donc utiliser pour évaluer $\bar{a}$ les lois du mouvement rectiligne uniformément varié (revoir ℳ 8).
D'après la loi horaire, en choisissant l'instant $t = 0$ pour le départ de A à vitesse nulle, $x = \frac{1}{2}\bar{a}\,t^2$. D'où $\bar{a} = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \times 2{,}0}{1{,}3^2} \simeq 2{,}37\ m \cdot s^{-2}$.
• Reportons dans (1), on en déduit $f = m(g\sin\alpha - \bar{a}) \simeq 0{,}1$ N.

b) • Le système est le solide.
• Le repère lié à la Terre est quasi galiléen.
• Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ du plan, à la force de frottement dirigée vers le bas de la piste puisque le mouvement se fait vers le haut.



• Le vecteur accélération est parallèle à l'axe trajectoire x'x, orienté dans le sens du mouvement.
• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{f}+\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$.
• Projetons sur x'x, on obtient $-f-P\sin\alpha=m\bar{a}$ (1), d'où

$$\bar{a}=\frac{-f}{m}-g\sin\alpha=-4{,}35\ m\cdot s^{-2}.$$

L'accélération algébrique est constante, le mouvement est uniformément varié (plus précisément uniformément retardé car $\bar{v}\cdot\bar{a}<0$).
• En B, $\overline{v_B}=3{,}0\ m\cdot s^{-1}$. En C, $\overline{v_C}=0$. D'après la relation $\overline{v_C^2}-\overline{v_B^2}=2\bar{a}(x_C-x_B)$,

$$(x_C-x_B)=\overline{BC}=\frac{\overline{v_C^2}-\overline{v_B^2}}{2\bar{a}}=1{,}03\ m\simeq 1\ m.$$

E 20. *Un ressort de masse négligeable est fixé par une de ses extrémités au plafond d'un ascenseur. On accroche à l'autre extrémité une masse* $m=300$ g.
L'ascenseur s'élève en translation rectiligne verticale. Le mouvement de cet ascenseur comprend trois phases :
— *un départ uniformément accéléré sur une distance de* 1 m; *l'allongement du ressort est* $b_1=16{,}2$ cm;
— *un mouvement uniforme sur une certaine hauteur;*
— *un mouvement uniformément retardé jusqu'à l'arrêt de l'ascenseur, l'allongement du ressort est alors* $b_3=13{,}2$ cm.
La constante de raideur du ressort est $k=20\ N\cdot m^{-1}$.

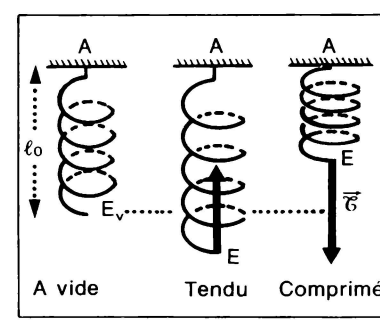
a) *Quelles sont les accélérations du mouvement dans les trois phases? Quel est l'allongement* b_2 *du ressort dans la deuxième phase?*

b) *Quelles sont les hauteurs parcourues pendant les trois phases sachant que la vitesse maximale de l'ascenseur est* $3\ m\cdot s^{-1}$ *et que la deuxième phase dure* 7 s. $g=9{,}8\ m\cdot s^{-2}$.

(D'après bac)

16 **Expression vectorielle de la tension d'un ressort.**

• Soit un ressort à spires non jointives pouvant être tendu ou comprimé. Ce ressort est fixé en A, son autre extrémité est E.
• A vide (on dit aussi au repos), l'extrémité E a la position E_v (l'indice v pour à vide). La longueur $AE_v=\ell_0$ est la longueur à vide (ou au repos).



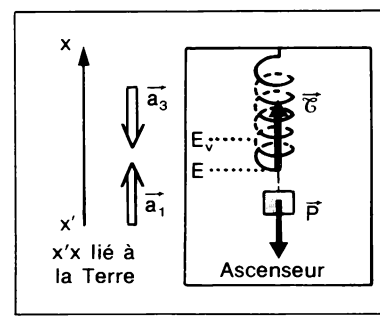
• Si l'on tire sur le ressort, on l'allonge de $b = E_v E$. L'action du ressort sur l'objet qui tire est une force localisée en E, parallèle à l'axe du ressort $AE_v E$, de sens E vers E_v, de module $\mathcal{C} = kb = kE_v E$ (k étant le coefficient de raideur du ressort en $N \cdot m^{-1}$).
On peut résumer les caractéristiques de cette force, appelée tension du ressort $\vec{\mathcal{C}}$, par :

$$\vec{\mathcal{C}} = -k\overrightarrow{E_v E}.$$

• Cette expression vectorielle convient aussi si le ressort est comprimé, dans ce cas $b = \|\overrightarrow{E_v E}\| = E_v E$ est le raccourcissement du ressort.

S 20. *a*) • Dans la deuxième phase le mouvement est rectiligne uniforme, le vecteur accélération $\vec{a}_2 = \vec{0}$.
Dans la première phase, uniformément accélérée, le vecteur accélération $\vec{a}_1$ est constant et est dirigé dans le sens du mouvement, donc vers le haut.
Dans la troisième phase, uniformément retardée, le vecteur accélération $\vec{a}_3$ est constant et est dirigé à contre-sens du mouvement, donc vers le bas.

• Nous allons évaluer a_1, a_3 et b_2 en appliquant le théorème du centre d'inertie.



— Le système est la masse accrochée au ressort.
— Le repère lié à la Terre est quasi galiléen.
— La masse est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la tension du ressort $\vec{\mathcal{C}} = -k\overrightarrow{E_v E}$ (E_v position de l'extrémité du ressort à vide, E position de cette extrémité lorsque le ressort s'est stabilisé par rapport à l'ascenseur).
— Le centre d'inertie de la masse, stabilisée par rapport à l'ascenseur, a la même accélération $\vec{a}$ que la cage d'ascenseur en translation ($\vec{a}$ étant successivement égal à $\vec{a}_1$, $\vec{0}$, $\vec{a}_3$).
— D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{\mathcal{C}} = m\vec{a}.$$

— Projetons sur x'x, axe vertical lié à la Terre, orienté vers le haut :

$$\overline{P_x} + \overline{\mathcal{C}_x} = m\overline{a_x}.$$

$\overline{P_x} = -P$; $\overline{\mathcal{C}_x} = +\mathcal{C}$ car le ressort toujours tendu tire vers le haut; $\overline{a_x} = \bar{a}$, mesure algébrique de l'accélération suivant x'x.

D'où $$-P + \mathcal{C} = m\bar{a}.$$

— Comme $P = mg$ et $\mathcal{C} = kE_v E = kb$, il s'ensuit :

$$-mg + kb = m\bar{a}. \qquad (1)$$

— Dans la première phase $b = b_1$, d'où $\bar{a} = \overline{a_1} = -g + \dfrac{k}{m} b_1 = 1\ m \cdot s^{-2}$ ($\overline{a_1}$ est positif, cela confirme que $\vec{a}_1$ est orienté vers le haut).

— Dans la deuxième phase $a_2 = 0$, d'où $b = b_2 = \dfrac{mg}{k} = 0{,}147$ m.

— Dans la troisième phase $b = b_3$, d'où $\bar{a} = \bar{a_3} = -g + \dfrac{k}{m} b_3 = -1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (cela confirme que $\vec{a_3}$ est orienté vers le bas).

b) Réponses (revoir éventuellement l'exercice 12 du même type).
Première phase : (durée 3 s), hauteur 4,5 m.
Deuxième phase : hauteur 21 m.
Troisième phase : (durée 3 s) hauteur 4,5 m.

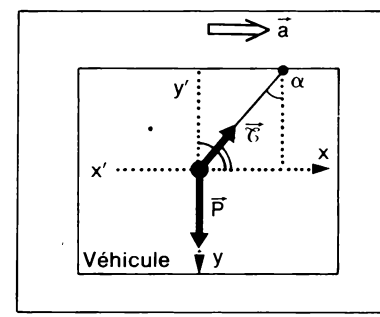
E 21. *On dispose d'un pendule constitué d'une bille* A *(assimilable à un point matériel de masse* $m = 50$ g*) attachée à un fil inextensible, de masse négligeable, très souple. Ce pendule est suspendu au plafond d'un véhicule. Ce dernier démarre en translation rectiligne horizontale, il atteint une vitesse* $v_1 = 18\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ *après avoir parcouru la distance* $x_1 = 10$ m *d'un mouvement uniformément accéléré.* $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

a) *Déterminer la position du fil par rapport à la verticale au cours de ce démarrage et la tension du fil.*

b) *Un repère d'espace lié au véhicule est-il galiléen?*

(D'après bac)

S 21. *a*) • Le système est la bille A accrochée au fil.
• Le repère lié à la Terre est pratiquement galiléen.
• La bille A est soumise à son poids $\vec{P}$ dû à la Terre, à la tension $\vec{\mathcal{T}}$ du fil, de même direction que le fil.
• C'est $\vec{\mathcal{T}}$ qui tire la bille et lui permet de prendre la même accélération $\vec{a}$ que le véhicule : grossièrement $\vec{\mathcal{T}}$ doit tirer dans le sens de $\vec{a}$, le fil doit s'incliner à contre-sens de $\vec{a}$ d'un angle α par rapport à la verticale.



• D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{\mathcal{T}} = m\vec{a}.$$

• Projetons sur l'axe horizontal x'x orienté dans le sens de $\vec{a}$:

$$\mathcal{T} \sin \alpha = m\bar{a}. \qquad (1)$$

• Projetons sur l'axe vertical y'y orienté vers le bas :

$$P - \mathcal{T} \cos \alpha = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{T} \cos \alpha = mg. \qquad (2)$$

• Faison le rapport $\dfrac{(2)}{(1)}$:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\bar{a}}{g}. \qquad (3)$$

• Élevons (1) au carré, (2) au carré et ajoutons :

$$\mathcal{T}^2 \sin^2 \alpha + \mathcal{T}^2 \cos^2 \alpha = m^2 \bar{a}^2 + m^2 g^2,$$

en remarquant que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, on en déduit :

$$\mathcal{C} = m\sqrt{a^2 + g^2}. \qquad (4)$$

• Application numérique.
Il faut calculer $\bar{a}$ en remarquant que le mouvement uniformément accéléré fait passer de l'état de mouvement ($x_0 = 0$; $v_0 = 0$) à l'état

$$\left(x_1 = 10 \text{ m}; v_1 = \frac{18}{3{,}6} = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\right).$$

D'après $\overline{v_1^2} - \overline{v_0^2} = 2\bar{a}(x_1 - x_0)$, on détermine $\bar{a} = 1{,}25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
En reportant dans (3) : $\text{tg}\,\alpha = 0{,}127$ d'où $\alpha = 7^0{,}27 = 7^0\ 16'$; en reportant dans (4) $\mathcal{C} = 0{,}494$ N.

b) • Le système est la bille A accrochée au fil.
• Le repère est lié au véhicule en translation accélérée par rapport à la Terre.
• La bille A est soumise exactement aux mêmes forces $\vec{P}$ et $\vec{\mathcal{C}}$.
• La bille A est immobile dans ce repère, son vecteur accélération $\vec{a}$/véhicule $= \vec{0}$.
• Le théorème du centre d'inertie $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$/véhicule $= \vec{0}$ ne s'applique donc pas dans ce repère puisque $\vec{P} + \vec{\mathcal{C}} \neq \vec{0}$: le repère « véhicule accéléré par rapport à la Terre » n'est pas galiléen.

E 22. *Un mobile autoporteur peut se déplacer sur une table horizontale. Il est muni d'un marqueur* M *qui inscrit les positions de son centre d'inertie* G *tous les intervalles de temps* $\varepsilon = 40$ ms. *Il est relié par un fil fin inextensible à un point* O, *fixe par rapport à la table. Ce mobile est lancé dans un mouvement circulaire uniforme de rayon* $r = 14$ cm. *Sa masse est* $m = 0{,}7$ kg.

a) *Entre le 1^er^ point marqué* M_1 *et le 16^e^ point marqué* M_{16}, *l'angle balayé par le fil est* $|(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_{16}})| = 216°$. *Quelle est la vitesse angulaire du centre d'inertie?*

b) *Quelle est la tension du fil? Les frottements sont négligeables.*

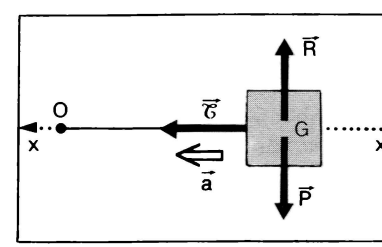
c) *Après* M_{18}, *on brûle le fil. Quel est la nature du mouvement de* G *après la rupture du fil?*

d) *Peut-on dire que le mouvement de* G, *de* M_1 *jusqu'à la limite de la table, est uniforme?*

S 22. *a)* • L'angle balayé $\theta = |(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_{16}})| = \frac{216}{180} \times \pi = 3{,}77$ rad. Entre le marquage de M_1 et le marquage de M_{16} il s'écoule la durée $t = 15\varepsilon = 0{,}6$ s. Le mouvement de rotation étant uniforme on peut écrire :

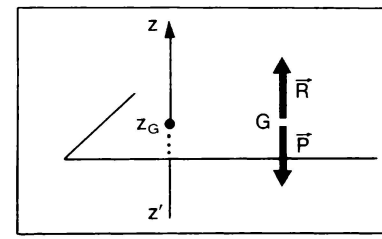
$$\omega = \frac{\text{angle balayé}}{\text{durée nécessaire}} = \frac{\theta}{t} = 6{,}28 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \text{ (revoir } \mathcal{M}\ 5).$$

b) • Le système est l'autoporteur.
• Le repère est la table immobile par rapport à la Terre, donc pratiquement galiléen comme la Terre.
• L'autoporteur est soumis à son poids $\vec{P}$ dû à la Terre; à l'action du coussin d'air caractérisée par une force $\vec{R}$ perpendiculaire au plan; à la tension du fil $\vec{\mathcal{C}}$ parallèle au fil, de sens G vers O.



• Le mouvement de G étant circulaire et uniforme, l'accélération de G est centripète (donc parallèle à OG, de sens G vers O), de module constant $a = r\omega^2$ (revoir ℳ 5).
• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{P} + \vec{R} + \vec{\mathcal{C}} = m\vec{a}$.
• Projetons sur l'axe x'x de mêmes direction et sens que $\vec{a}$: $\mathcal{C} = ma$.
D'où $\mathcal{C} = mr\omega^2 = 3{,}86$ N.

c) • Après la rupture du fil, l'autoporteur n'est plus soumis qu'aux deux forces verticales $\vec{P}$ et $\vec{R}$.



• Le centre d'inertie G de l'autoporteur reste dans un plan horizontal. L'altitude de G, repérée sur un axe vertical z'z, reste constante : $z_G = C^{te}$.
Par suite $\dot{z}_G = 0$ et $\ddot{z}_G = a_z = 0$.
• D'après le théorème du centre d'inertie, toujours dans le repère table,
$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ (1).
• Projetons sur z'z : $-P + R = ma_z = 0$. D'où $P = R$. Les deux forces $\vec{P}$ et $\vec{R}$ ont donc même direction, même module, des sens opposés. Par suite $\vec{P} = -\vec{R}$, et d'après (1), $\vec{a} = \vec{0}$. Le mouvement de G, après la rupture du fil, est donc rectiligne uniforme jusqu'au bord de la table (revoir ℳ 7).

d) L'autoporteur a une vitesse curviligne, $v = r\omega$, constante pendant son mouvement circulaire. En brûlant le fil on ne modifie pas cette vitesse : le mouvement rectiligne qui suit est un mouvement uniforme de même vitesse.
Le mouvement complet, circulaire puis rectiligne, est donc uniforme.

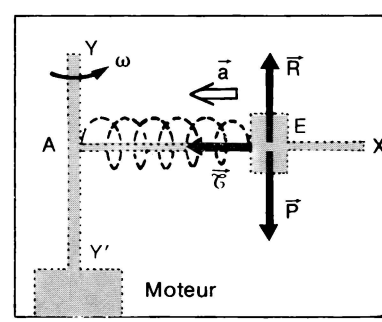
E 23. *Un ressort a pour longueur au repos* $\ell_0 = 15$ cm, *son coefficient de raideur est* $k = 50$ N·m^{-1}. *Il est enfilé sur une tige horizontale* AX; *l'extrémité* A *est fixée sur une tige verticale* YY'. *Un solide pratiquement ponctuel, de masse* $m = 100$ g, *attaché à l'autre extrémité* E *du ressort, peut glisser sans frottement le long de la tige horizontale.*
Un moteur fait tourner l'ensemble autour de YY' *avec une vitesse angulaire constante* ω.

a) *Établir la relation donnant l'allongement* b *du ressort en fonction de* ω, m, ℓ_0 *et* k.

b) *Sachant que le ressort ne peut dépasser une longueur de* 40 cm *sans se déformer irréversiblement, quelle est, en tours par seconde, la plus grande vitesse de rotation permise?*

(D'après bac)

S 23. *a*) • Le système est le solide lié au ressort.
• Le repère lié à la Terre est pratiquement galiléen.
• Le solide est soumis :
— à son poids $\vec{P}$ dû à la Terre;
— à l'action de la tige AX caractérisée par une force $\vec{R}$ perpendiculaire à AX puisque les frottements sont négligeables (revoir ℳ 10);



— à l'action du ressort $\vec{\mathcal{C}} = -k\overrightarrow{E_vE}$, E_v position de l'extrémité lorsque le ressort est au repos.

• Le régime de rotation permanente établi, le solide, pratiquement localisé en E puisqu'il est ponctuel, décrit un cercle horizontal de centre A, de rayon $AE = AE_v + E_vE = \ell_0 + b$, à la vitesse angulaire constante ω.
L'accélération de E, en mouvement circulaire uniforme, est donc centripète, de module constant $a = (\ell_0 + b)\omega^2$ (revoir ℳ 5).
• D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{\mathcal{C}} + \vec{R} = m\vec{a}.$$

• Projetons sur l'axe XA orienté de X vers A : $\mathcal{C} = ma$.
Comme $\mathcal{C} = kE_vE = kb$ et $a = (\ell_0 + b)\omega^2$, il s'ensuit :

$$kb = m(\ell_0 + b)\omega^2 \quad (1), \quad \text{soit} \quad b = \frac{m\ell_0\omega^2}{k - m\omega^2} \quad (2).$$

b) Montrons que lorsque ω croît*, b croît (ce qui est physiquement intuitif).
Pour cela divisons par ω^2 le numérateur et le dénominateur de l'expression (2) : $b = \dfrac{m\ell_0}{\dfrac{k}{\omega^2} - m}$. Lorsque ω croît, $\dfrac{k}{\omega^2}$ décroît, le dénominateur décroît et par suite b croît.
Lorsque b atteint sa valeur maximale permise $b_{max} = 0{,}40 - 0{,}15 = 0{,}25$ m, ω atteint sa valeur maximale permise égale, d'après (1), à $\omega_{max} = \sqrt{\dfrac{kb_{max}}{m(\ell_0 + b_{max})}} = 17{,}7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. La vitesse de rotation angulaire maximale, en $\text{tr}\cdot\text{s}^{-1}$, est $N_{max} = \dfrac{\omega_{max}}{2\pi} = 2{,}82 \text{ tr}\cdot\text{s}^{-1}$.

* Note : la théorie précédente suppose que $k - m\omega^2$ reste positif, donc que ω ne dépasse pas la valeur $\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 22{,}4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

E 24. *Une bille* A *de masse* m = 0,10 kg *assimilable à un point matériel est fixée à l'extrémité d'un fil* OA, *souple, inextensible, de masse négligeable, de longueur* $\ell = 1$ m. *Le fil est attaché en* O *à un axe vertical* z'z *qui tourne sur lui-même.*

a) *La bille ainsi lancée, le fil* OA *décrit un cône de révolution de sommet* O, *d'axe vertical* z'z. *Le mouvement de* A *est uniforme.*
L'angle de OA *avec la verticale* z'z *vaut* $\beta = 20°$.
Calculer :

α) *la vitesse angulaire* ω *de la bille;*

β) *la vitesse curviligne (ou linéaire)* v *de la bille;*

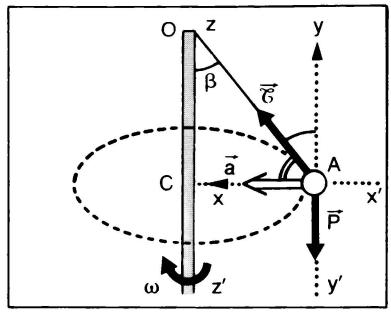
γ) *la tension du fil;*

δ) *l'énergie cinétique de la bille.*

b) *A partir de quelle vitesse angulaire* ω_{min}, *la bille* A *se décolle-t-elle de l'axe* z'z? $g = 9{,}80 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

(D'après bac)

S 24. *a*) α) • Le système est la bille A.
• Le repère lié à la Terre est pratiquement galiléen.



• La bille est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dû à la Terre, à la tension du fil $\vec{\mathcal{T}}$, de même direction que le fil.

• Le régime de rotation uniforme établi, la bille décrit un cercle horizontal, de centre C, de rayon CA, à la vitesse angulaire constante ω. Dans le triangle rectangle OCA, $\sin\beta = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{\ell}$, d'où $AC = \ell \sin\beta$. Le mouvement étant circulaire et uniforme, le vecteur accélération est centripète (donc horizontal, de sens A vers C), de module constant $a = \omega^2 \cdot \ell \sin\beta$ (1).
• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{P} + \vec{\mathcal{T}} = m\vec{a}$.
• Projetons sur l'axe y'y vertical, vers le haut : $-P + \mathcal{T}\cos\beta = 0$, d'où $\mathcal{T}\cos\beta = mg$ (2).
• Projetons sur l'axe x'x horizontal, centripète : $\mathcal{T}\sin\beta = ma$. Remplaçons a par son expression (1) : $\mathcal{T}\sin\beta = m\omega^2\ell\sin\beta$, d'où $\mathcal{T} = m\omega^2\ell$ (3).
• En éliminant $\mathcal{T}$ entre (2) et (3) on obtient $\omega^2\ell\cos\beta = g$ (4).
• D'après (4) $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\beta}} = 3{,}23 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

β) • La vitesse curviligne v dépend de la vitesse angulaire et du rayon du cercle trajectoire : $v = AC\cdot\omega = \ell\sin\beta\,\omega$ (revoir éventuellement *M* 5). Numériquement $v = 1{,}10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

γ) On peut évaluer $\mathcal{T}$ soit en utilisant l'expression (2), soit l'expression (3). L'expression (2) est meilleure car elle fait intervenir uniquement des données de l'énoncé : $\mathcal{T} = \frac{mg}{\cos\beta} = 1{,}04$ N.

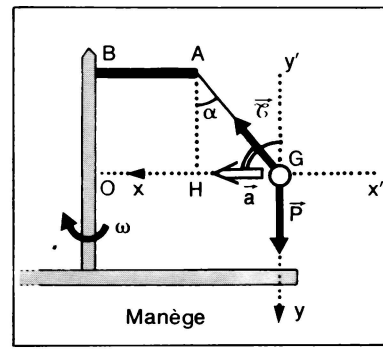
δ) • La bille est ponctuelle, quel que soit son mouvement, son énergie cinétique a pour expression $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Numériquement $E_c = 6\cdot10^{-2}$ J.

Remarque. Certains élèves écrivent que la bille est en rotation autour de l'axe zz', son moment d'inertie $J_{zz'} = m\cdot AC^2 = m\ell^2\sin^2\beta$, son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}J_{zz'}\,\omega^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\sin^2\beta\,\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2$: on retrouve la même expression.

b) • D'après (4), $\cos\beta = \frac{g}{\omega^2\ell}$ (5). La théorie, développée dans la première question, suppose que la bille A ne touche pas l'axe (sinon il faudrait faire intervenir l'action de contact de l'axe sur la bille), par suite β doit être non nul et $\cos\beta < 1$. D'après (5), il s'ensuit que $\frac{g}{\omega^2\ell} < 1$, d'où $\omega^2 > \frac{g}{\ell}$ et $\omega > \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \omega_{min}$.
Numériquement $\omega_{min} = 3{,}13 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

E 25. *Une personne de masse* $M = 50$ kg *est assise sur une nacelle d'un manège forain. La nacelle est constituée d'un siège de masse* $m = 10$ kg, *suspendu à une chaîne de longueur* $\ell = 2{,}20$ m *dont on négligera la masse. Cette chaîne est elle-même accrochée par son extrémité à la distance* $d = 2{,}50$ m *de l'axe de rotation du manège. On assimilera l'ensemble personne-nacelle à un point matériel* G. $g = 10\ m \cdot s^{-2}$
Quand le manège tourne à N $tr \cdot s^{-1}$, *la chaîne s'écarte d'un angle* $\alpha = 30°$ *de sa position d'équilibre verticale. Evaluer N.*

(D'après bac)



S 25. • Le système est l'ensemble personne-nacelle, de faibles dimensions, assimilable au point G.

• Le repère lié à la Terre est pratiquement galiléen.

• Le système est soumis à son poids total $\vec{P} = (M+m)\vec{g}$ dû à la Terre, à la tension $\vec{\mathcal{C}}$ de la chaîne AG.

• Lorsque le régime de rotation uniforme est établi, G décrit un cercle horizontal, de centre O, de rayon OG, à la vitesse angulaire constante $\omega = 2\pi N\ rad \cdot s^{-1}$.

Remarquons que $OG = OH + HG$; $OH = AB = d$; d'autre part, dans le triangle rectangle AHG, $\sin\alpha = \frac{HG}{AG}$, d'où $HG = \ell \sin\alpha$; par suite $OG = (d + \ell \sin\alpha)$. Le mouvement de G étant circulaire et uniforme, l'accélération $\vec{a}$ de G est centripète (donc horizontale, de G vers O), de module constant $a = \omega^2 \cdot OG = \omega^2(d + \ell \sin\alpha)$.

• D'après le théorème du centre d'inertie (en faisant attention que la masse du système est $M+m$) : $\vec{P} + \vec{\mathcal{C}} = (M+m)\vec{a}$.

• Projetons sur l'axe y'y, orienté vers le bas : $P - \mathcal{C}\cos\alpha = 0$ soit $\mathcal{C} = \frac{(M+m)g}{\cos\alpha}$ (1).

• Projetons sur l'axe horizontal x'x :

$$\mathcal{C}\sin\alpha = (M+m)a = (M+m)\omega^2(d + \ell\sin\alpha).$$

En tenant compte de (1) :

$$(M+m)g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = (M+m)\omega^2(d + \ell\sin\alpha).$$

Après simplification :

$$\omega^2 = \frac{g\ tg\ \alpha}{d + \ell\sin\alpha},\ \text{d'où}\ N = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\ tg\ \alpha}{d + \ell\sin\alpha}} = 0{,}2\ tr \cdot s^{-1}.$$

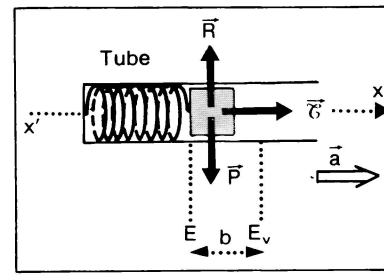
E 26. *Un aérotrain, véhicule mobile sur coussin d'air, guidé par un rail en béton rectiligne et horizontal, a une masse de 5 tonnes. Il est propulsé par un réacteur d'avion développant une poussée* $\vec{F}$ *parallèle au déplacement, de module constant. La résultante des forces de frottement dues à l'air est évaluée à 200 N par tonne en mouvement.*

a) *Partant du repos l'aérotrain atteint la vitesse de* $50\ m \cdot s^{-1}$ *en* 1000 m. *Quelle est la force de poussée* F *du réacteur?*

b) *Pour mesurer l'accélération tangentielle de l'aérotrain, on utilise un accéléromètre constitué par une masse* $m = 200\ g$ *fixée à un ressort coulissant sans frottements dans un tube disposé horizontalement, parallèlement au déplacement. L'autre extrémité du ressort est fixée au tube et est dirigée vers l'arrière du véhicule. Le ressort est à spires non jointives, sa constante de raideur est* $k = 10\ N \cdot m^{-1}$. *Au cours du démarrage précédent, le ressort est-il allongé, comprimé? de combien?*

(D'après bac)

S 26. *a*) Réponse : $F = f + m\bar{a}$, $\bar{a}$ est constant, on le calcule par $\bar{a} = \dfrac{v_1^2 - v_0^2}{2(x_1 - x_0)} = 1{,}25\ m \cdot s^{-2}$, d'où $F = (200 \times 5) + (5\,000 \times 1{,}25) = 7\,250$ N.



b) • Le système est la masse m accrochée au ressort de l'accéléromètre.

• Le repère lié à la Terre, est pratiquement galiléen.

• La masse est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dû à la Terre, à la réaction $\vec{R}$ du tube perpendiculaire à celui-ci puisque les frottements sont négligeables, à la tension du ressort $\vec{\mathcal{C}} = -k\overrightarrow{E_V E}$ en désignant par E_V la position de l'extrémité E au repos.

• La masse, stabilisée par rapport à l'aérotrain en translation, a la même accélération $\vec{a}$ que ce dernier.

• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{P} + \vec{R} + \vec{\mathcal{C}} = m\vec{a}$ (1). C'est $\vec{\mathcal{C}}$ qui communique l'accélération $\vec{a}$ à la masse, $\vec{\mathcal{C}}$ doit être dans le même sens que $\vec{a}$ (c'est-à-dire dirigé vers l'avant car le mouvement est accéléré), par suite $\overrightarrow{E_V E}$ doit être dirigé vers l'arrière : le ressort est comprimé de $E_V E = b$.

• Projetons l'égalité (1) sur x'x, axe horizontal, parallèle au déplacement, orienté vers l'avant du véhicule : $\mathcal{C} = ma$, d'où $kb = ma$ et $b = \dfrac{ma}{k} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m.

E 27. *Sur une place horizontale une petite voiture radioguidée décrit un cercle de rayon* $r = 20$ m, *à vitesse constante. La masse de la voiture est* $m = 16$ kg. *On négligera ses dimensions devant celle de la trajectoire.*

a) *La force de frottement longitudinale* $\vec{f}$, *parallèle au vecteur vitesse* $\vec{v}$, *de sens opposé, a un module constant* $f = 50$ N. *La force de frottement latérale* $\vec{f}'$, *perpendiculaire au vecteur vitesse, qui permet à la voiture de « tenir » sa trajectoire circulaire a pour module* $f' = 90$ N. *En déduire la force de traction du moteur* F *et la vitesse curviligne* v.

b) *La voiture roule maintenant à vitesse constante* $v = 10\ m \cdot s^{-1}$ *sur une piste circulaire relevée d'un angle* α *par rapport à l'horizontale. La voiture décrit un cercle horizontal de rayon* $r = 20$ m. *L'angle* α *est tel que la force de frottement latérale* $f' = 0$ *(cela veut dire que la voiture n'a alors aucune tendance à déraper même si la piste est très glissante). Évaluer* α. *On donne* $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

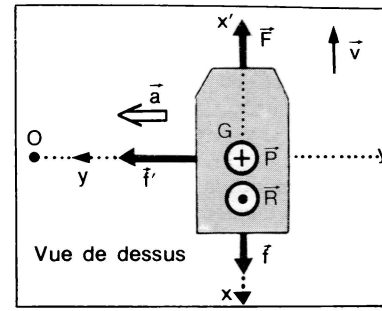
S 27. *a*) • Le système est la voiture.

• Le repère lié à la Terre est pratiquement galiléen.

• La voiture est soumise à :

— son poids $\vec{P}$ dû à la Terre (représenté par $\oplus$ sur la figure ci-contre, ce qui signifie que $\vec{P}$ est perpendiculaire au plan de la figure, dirigée vers l'arrière de la feuille);

— la réaction $\vec{R}$ de la route (représentée par $\odot$ sur la figure ci-contre, ce qui signifie que $\vec{R}$ est perpendiculaire à la figure, dirigée vers l'avant de la feuille);



— la force de traction $\vec{F}$, parallèle à $\vec{v}$, de même sens;

— la force de frottement longitudinale $\vec{f}$, parallèle à $\vec{v}$, de sens contraire;

— la force de frottement latérale $\vec{f}'$, perpendiculaire à $\vec{v}$, dirigée vers l'intérieur du virage (nous le justifierons).

• G décrit un cercle horizontal de centre O, de rayon OG = r, à la vitesse curviligne constante v. Le vecteur accélération $\vec{a}$ de G est donc centripète (dirigé suivant GO, donc perpendiculaire au vecteur vitesse), de module constant $a = \frac{v^2}{r}$.

• D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} + \vec{f}' = m\vec{a}. \qquad (1)$$

• Projetons sur un axe vertical zz' orienté vers le haut : $-P + R = 0$. Les deux forces $\vec{P}$ et $\vec{R}$ ont même direction, même module, des sens opposés, par suite $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ (2).

• Projetons sur l'axe horizontal x'x, parallèle à $\vec{v}$: $-F + f = 0$. Nous répondons déjà à une question : la force de traction $F = f = 50$ N. D'autre part $\vec{F}$ et $\vec{f}$ ont même direction, même module, des sens opposés, par suite $\vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$ (3).

• En tenant compte de (2) et (3), le théorème (1) s'écrit $\vec{f}' = m\vec{a}$: la force de frottement latérale $\vec{f}'$ est centripète comme $\vec{a}$.

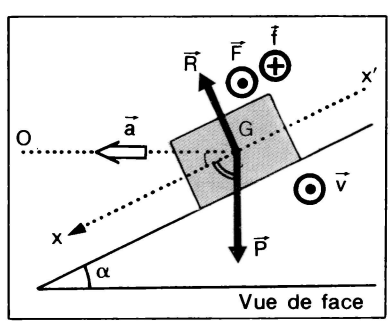
En module $f' = \frac{mv^2}{r}$, d'où $v = \sqrt{\frac{f'r}{m}} = 10{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 38{,}2\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

b) • Le système est la voiture.

• Le repère lié à la Terre est quasi galiléen.

• La voiture est soumise aux forces $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{F}$ et $\vec{f}$.

• G décrit un cercle horizontal de centre O, de rayon OG = r, à vitesse constante. L'accélération $\vec{a}$ de G est donc centripète (donc horizontale), de module constant $a = \frac{v^2}{r}$.



• D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}+\vec{f}=m\vec{a}.$$

• Projetons sur x'x, axe perpendiculaire à $\vec{R}$, $\vec{F}$ et $\vec{f}$: $P \sin \alpha = ma \cos \alpha$.

D'où $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g} = \frac{v^2}{rg}$. Numériquement $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}51$ et $\alpha = 27°$.

E 28. *Un pendule est constitué par un fil de longueur* $\ell = 1$ m, *auquel est fixé une petite bille d'acier de masse* $m = 80$ g. *Le pendule est suspendu en son extrémité* O *et peut osciller autour d'un axe horizontal passant par* O. *La bille est abandonnée sans vitesse initiale, fil tendu, d'un point* A *tel que l'angle entre* OA *et la verticale soit* $\theta = 50°$.

a) *Calculer la vitesse* v_B *de la bille, supposée ponctuelle, lors du passage par la position d'équilibre* B.

b) *Calculer la tension* $\mathcal{T}_B$ *du fil lorsque la bille passe par* B.

c) *Calculer la tension* $\mathcal{T}_A$ *du fil lorsque la bille repasse par* A *à vitesse nulle. On donne* $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

(D'après bac)

17 Le théorème de l'énergie cinétique.

• Entre deux instants, la variation de l'énergie cinétique d'un solide, dans un repère galiléen, est égale à la somme des travaux effectués par les forces agissant sur ce solide entre ces deux instants :

$$\mathbf{E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma\, W_{\vec{F}}}$$

(Le théorème de l'énergie cinétique se démontre à partir de la relation fondamentale de la dynamique).

• Soit $\vec{F}$ une force dont le point d'application M est animé de la vitesse $\vec{v}$, la puissance de $\vec{F}$ est $\mathcal{P}_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, la puissance s'exprime en watt.

• Comme $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ (revoir ℳ 1), il s'ensuit que $\mathcal{P}_F = \vec{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, le produit $dW_{\vec{F}} = \mathcal{P}_{\vec{F}}\, dt = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$ est le travail élémentaire, exprimé en joule, de la force subissant le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$.

• Si la force $\vec{F}$ reste constante de M_1 à M_2, alors

$$\mathbf{W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}.}$$

Exemple : le travail du poids d'un objet se déplaçant de A à B est $W_P = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = mg(z_A - z_B)$, l'axe vertical $\overrightarrow{z'z}$ étant orienté vers le haut.

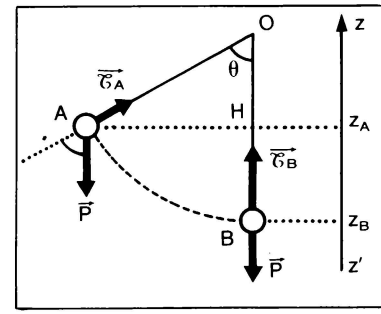
• Si la force $\vec{F}$ est la tension d'un ressort dont l'extrémité passe de la position à vide E_V à la position E, on montre que :

$$W_{\vec{\mathcal{T}}} = -\frac{1}{2} k (E_V E)^2.$$

18 **« Présentation de la démarche ».**

Prenons de bonnes habitudes, n'attendons pas de « crouler » sous les lois de Lorentz, Laplace, Lenz, Einstein, ... pour faire de l'ordre dans notre esprit.
Il est important de maîtriser le problème posé, c'est-à-dire de présenter le phénomène physique, les lois à appliquer... C'est ce que nous ferons à partir de maintenant dans la rubrique « présentation de la démarche ».

S 28. *a*) • Présentation de la démarche : le mouvement de la bille de A à B est circulaire mais ne suit pas une loi de mouvement simple qui nous permettrait d'évaluer v_B; pensons au théorème de l'énergie cinétique qui fait intervenir v_B.



• Le système est la bille.

• Le repère lié à la Terre, est pratiquement galiléen.

• Suivons l'évolution du système entre la position initiale A et la position finale B. En A la vitesse $v_A = 0$, l'énergie cinétique de la bille $E_{c_A} = 0$. En B, la vitesse curviligne de la bille est v_B. La bille étant pratiquement ponctuelle, son énergie cinétique $E_{c_B} = \frac{1}{2} m v_B^2$.

• La bille entre A et B est soumise à deux forces : la tension $\vec{\mathcal{C}}$ du fil, le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dû à la Terre. Évaluons leurs travaux de A à B.
— La force $\vec{\mathcal{C}}$ n'est pas constante (on ne peut pas utiliser le produit scalaire $\vec{\mathcal{C}} \cdot \overrightarrow{AB}$ pour évaluer son travail). Remarquons que la tension $\vec{\mathcal{C}}$ est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$: la puissance de $\vec{\mathcal{C}}$, $\mathcal{P}_{\vec{\mathcal{C}}} = \vec{\mathcal{C}} \cdot \vec{v}$, est constamment nulle de A à B, tous les travaux élémentaires $dW_{\vec{\mathcal{C}}} = \mathcal{P}_{\vec{\mathcal{C}}}\, dt$ (revoir *M* 17) sont donc nuls, le travail de A à B est donc nul. (On dit parfois de façon rapide : $\vec{\mathcal{C}}$ est perpendiculaire au déplacement, son travail est nul).
— Le poids $\vec{P}$ constant effectue le travail $W_{\vec{P}} = mg(z_A - z_B)$, l'axe vertical z'z étant orienté vers le haut. La différence $(z_A - z_B)$ est positive, elle est égale à

$BH = OB - OH = \ell - \ell \cos\theta$ (en effet dans le triangle rectangle OAH, $OA = \ell$, $\cos\theta = \frac{OH}{\ell}$). Par suite $W_{\vec{P}} = mg\ell(1 - \cos\theta)$.

• D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{c_B} - E_{c_A} = W_P + W_{\vec{\mathcal{C}}} \text{ d'où } \frac{1}{2} m v_B^2 = mg\ell(1 - \cos\theta) \qquad (1)$$

La vitesse curviligne en B est donc $v_B = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta)} = 2{,}65\ m \cdot s^{-1}$.

b) • Présentation de la démarche : en passant par B la bille est lancée, elle possède une vitesse et une accélération non nulles, elle n'est pas en équilibre bien que B s'appelle la position d'équilibre; le théorème du centre d'inertie fait intervenir $\overrightarrow{\mathcal{C}_B}$ que l'on veut évaluer.

• Le système est la bille passant par B.

• Le repère est lié à la Terre, il est pratiquement galiléen.

• A priori l'accélération $\vec{a}$ de B est égale à $\vec{a} = \dot{v}\,\vec{T} + \frac{v^2}{\ell}\vec{N}$ (revoir $\mathcal{M}$ 3), $\vec{T}$ désignant un vecteur unitaire tangent, $\vec{N}$ un vecteur unitaire normal centripète.

• La bille est soumise aux forces verticales $\overrightarrow{\mathcal{C}_B}$ et $\vec{P}$.

• D'après le théorème du centre d'inertie : $\vec{P} + \overrightarrow{\mathcal{C}_B} = m\vec{a}$. Les deux vecteurs $\vec{P}$ et $\overrightarrow{\mathcal{C}_B}$ étant verticaux, $\vec{a}$ est vertical c'est-à-dire porté par N : $\vec{a}$ se confond avec $\overrightarrow{a_N}$, $\vec{a} = \frac{v^2}{\ell}\vec{N}$.

• Projetons sur l'axe z'z : $-P + \mathcal{C}_B = m\frac{v^2}{\ell}$ d'où $\mathcal{C}_B = mg + m\frac{v^2}{\ell}$.

Comme $v = v_B$, d'après (1), $\frac{v_B^2}{\ell} = 2\,g(1 - \cos\theta)$. Par suite

$\mathcal{C}_B = mg + 2mg(1 - \cos\theta) = mg(3 - 2\cos\theta) = 1{,}34$ N.

c) • Présentation de la démarche : en repassant par A la vitesse de la bille A est nulle, il ne faut pas en conclure que la bille est en équilibre car si l'accélération normale $\overrightarrow{a_N} = \frac{v^2}{\ell}\vec{N}$ est nulle, l'accélération tangentielle ne l'est pas; le fait que $\overrightarrow{a_N} = \vec{0}$ va nous permettre d'exploiter facilement le théorème du centre d'inertie.

• Le système est la bille passant par A, à vitesse nulle.

• Le repère, lié à la Terre, est pratiquement galiléen.

• L'accélération normale $\overrightarrow{a_N} = \vec{0}$ car la vitesse est nulle.

• D'après le théorème du centre d'inertie : $\vec{P} + \overrightarrow{\mathcal{C}_A} = m\vec{a}$.

• Projetons sur l'axe OA, orienté de A vers O : $-P\cos\theta + \mathcal{C}_A = m\,a_N = 0$.

D'où $\mathcal{C}_A = mg\cos\theta = 0{,}50$ N.

E 29. *(Problème accessible car l'énoncé précise la démarche.)*

Un solide de petites dimensions S, *de masse* m, *assimilable à un point matériel est placé au sommet* A *d'une sphère de rayon* R = 1 m. *On déplace légèrement le point matériel de sorte qu'il quitte la position* A *avec une vitesse que l'on considère comme nulle, puis glisse sans frottement le long de la sphère de centre* O.

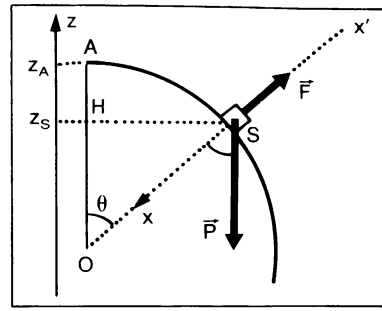
a) *En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, la position du point étant repérée par l'angle* $\widehat{AOS} = \theta°$, *exprimer le module du vecteur vitesse de* S, *en fonction de* θ, *avant qu'il quitte la sphère.*

b) *En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, exprimer en fonction de* θ, *le module de la réaction* F *exercée par la sphère sur le point* S.

c) *En déduire l'angle* θ, *lorsque le point quitte la sphère. Quelle est sa vitesse en ce point?* $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

(D'après bac)

S 29. *a*) • Le système est le solide pratiquement ponctuel S.



• Le repère lié à la Terre est quasi galiléen.

• Suivons l'évolution du système entre la position initiale A et la position finale S. En A, l'énergie cinétique de S est pratiquement nulle. En S, l'objet étant pratiquement ponctuel, son énergie cinétique est $E_{c_S} = \frac{1}{2} mv^2$.

• Le solide restant au contact de la sphère est soumis à deux forces : son poids $\vec{P}$ dû à la Terre, la réaction $\vec{F}$ due à la sphère, perpendiculaire à la surface de contact solide-sphère puisque les frottements sont négligeables, donc portée par le rayon OS. Évaluons leurs travaux de O à S.
— Le poids $\vec{P}$ effectue le travail $W_{\vec{P}} = mg(z_A - z_S) = mg\,AH$.
Comme $AH = OA - OH = R - R\cos\theta$, on en déduit $W_{\vec{P}} = mgR(1 - \cos\theta)$.
— La force $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement, son travail est nul (revoir éventuellement S 28 *a*).

• D'après le théorème de l'énergie cinétique $E_{c_S} - E_{c_A} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{F}}$, d'où $\frac{1}{2} mv^2 = mgR(1 - \cos\theta)$ (1) et $v = \sqrt{2gR(1 - \cos\theta)}$.

b) • Le système est le solide S écarté de $\widehat{AOS} = \theta$ de sa position de départ, S restant sur la sphère.
• Le repère lié à la Terre est pratiquement galiléen.
• En coordonnées curvilignes l'accélération $\vec{a}$ de S est égale à $\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N}$ avec $\vec{a_T} = \dot{v}\,\vec{T}$ et $\vec{a_N} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$.

• D'après la relation fondamentale de la dynamique qui se réduit au théorème du centre d'inertie puisque nous sommes dans le domaine de la mécanique newtonienne (revoir ℳ 14) : $\vec{F} + \vec{P} = m\vec{a} = m\vec{a_T} + m\vec{a_N}$.

• Projetons sur l'axe x'x, de direction SO, centripète comme $\vec{a_N}$:

$$-F + P\cos\theta = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}.$$

D'où $F = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$ (2). D'après (1), $\frac{v^2}{R} = 2g(1 - \cos\theta)$, remplaçons dans (2) : $F = mg(3\cos\theta - 2)$.

c) • Le solide S reste au contact de la sphère tant que F est non nul. A la limite lorsque F s'annule, S décolle de la sphère. Alors l'angle θ est tel que $3\cos\theta = 2$, d'où $\cos\theta = \frac{2}{3}$ et $\theta = 48{,}2° = 48° 11'$.

• La vitesse $\vec{v}$ du solide est alors un vecteur tangent à la sphère, de module $v = \sqrt{2\,gR(1 - \cos 48{,}2°)} = 2{,}58\ m \cdot s^{-1}$.

E 30. *(Problème faisant intervenir deux solides, très accessible car l'énoncé précise la démarche.)*
Un traîneau à moteur T *de masse* $m_1 = 460$ kg *entraîne une luge* L *de masse* $m_2 = 40$ kg *par l'intermédiaire d'un fil inextensible. L'ensemble* (T, L) *est en translation rectiligne, s'élevant suivant une piste inclinée de* $\alpha = 10°$ *par rapport à l'horizontale. Les forces de frottement représentent* 0,2 N *par kg en mouvement.* $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

a) α) *Au démarrage la vitesse passe de* 0 *à* $36\ km \cdot h^{-1}$ *en* 50 m, *quelle est l'accélération de l'ensemble?*

β) *En prenant l'ensemble comme système, évaluer la force de traction* F *du moteur de* T.

γ) *En prenant* L *comme système, évaluer la tension du fil reliant* T *à* L.

b) *La vitesse ensuite reste égale à* $36\ km \cdot h^{-1}$.

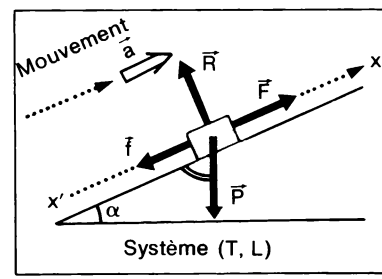
α) *Quelle est la nouvelle force de traction du moteur? Quelle puissance le moteur développe-t-il?*

β) *Quelle est la nouvelle tension du fil de liaison?*

S 30. (La rédaction est très abrégée.)

a) α) Les forces sont constantes, donc $\vec{a}$ est constant, le mouvement étant rectiligne, il est uniformément varié. On trouvera $\bar{a} = 1\ m \cdot s^{-2}$, sur l'axe x'x.

β) Prendre l'ensemble comme système, cet ensemble se comporte comme un solide. Sur la figure ci-contre $\vec{P} = (m_1 + m_2)\,\vec{g}$, $\vec{f}$ est la force de frottement totale.



Système (T, L)

On trouvera $F = f + (m_1 + m_2)\,g \sin\alpha + (m_1 + m_2)\,\bar{a} = 1470$ N.

γ) La luge a la même accélération $\bar{a}$, elle est soumise à $\vec{P_2} = m_2\,\vec{g}$, à la réaction $\vec{R_2}$, à la force de frottement $\vec{f_2}$, à la tension du fil $\vec{\mathcal{T}}$. On trouvera :

$$\mathcal{T} = f_2 + m_2\,g \sin\alpha + m_2\,\bar{a} = 117 \simeq 120\ \text{N}.$$

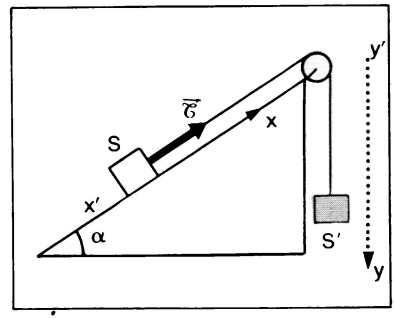
Remarques :
— pour L la force $\vec{\mathcal{T}}$ est une force extérieure qui intervient dans le théorème du centre d'inertie;
— pour (T, L) la force $\vec{\mathcal{T}}$ est une force intérieure, elle n'intervient pas dans le théorème du centre d'inertie parce qu'elle s'annule avec sa force réciproque;
— on aurait pu calculer $\mathcal{T}$ en considérant le système T :
$\mathcal{T} = F - m_1\,g \sin\alpha - f_1 - m_1\,\bar{a}$.

b) α) • Le mouvement est rectiligne, la vitesse est constante : le mouvement est donc rectiligne et uniforme : $\vec{a} = \vec{0}$. Faire $\bar{a} = 0$ dans l'expression de F ci-dessus on trouvera $F \simeq 970$ N.

• La puissance développée par le moteur est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (revoir $\mathcal{M}$ 17), $\vec{F}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs colinéaires, de même sens, $\mathcal{P} = F \cdot v = 9700$ W.

β) Faire $\bar{a} = 0$ dans l'expression de $\mathcal{T}$ ci-dessus : $\mathcal{T} = 77 \simeq 80$ N.

E 31. *(Problème faisant intervenir deux solides, accessible car l'énoncé précise la démarche.)*
Un solide de masse m *se translate sans frottement le long d'une ligne de plus grande pente* x'x *d'un plan incliné de* α *par rapport à l'horizontale. Ce solide s'élève tiré par un fil parallèle à* x'x, *de tension* $\mathcal{T}$. *Pour les questions* a) *et* b), $m = 600$ g; $\alpha = 30°$; $\mathcal{T} = 3{,}6$ N.



a) *Quelle est l'accélération algébrique* $\overline{a_x}$ *du solide, mesurée sur l'axe* x'x *orienté positivement vers le haut?*

b) *La tension du fil est due à un autre solide* S', *relié à* S *par un fil inextensible, sans masse, passant sur une poulie de moment d'inertie négligeable et tournant sans frottement. Avec une telle poulie et un tel fil les tensions des deux brins de fil situés de part et d'autre de la poulie sont les mêmes.*

α) *Quelle est l'accélération algébrique* $\overline{a_y}$ *de* S', *mesurée sur l'axe* y'y *vertical orienté vers le bas?*

β) *En déduire la masse* m' *de* S'.

c) *On recommence l'expérience, cette fois-ci* $m' = 600$ g; $m = 600$ g; $\alpha = 30°$.

α) *Quelle est l'accélération de* S'?

β) S' *est parti, sans vitesse, d'une position située* 0,8 m *au-dessus du sol. Quelle est la vitesse de* S *juste avant que* S' *se pose sur le sol?*

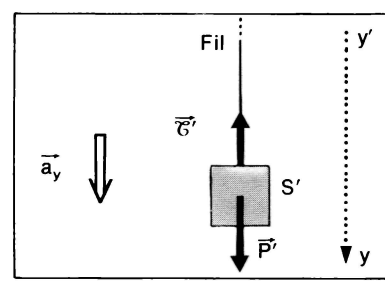
γ) *Quelle distance* S *fait-il avant de rebrousser chemin?* $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

S 31. (Des questions ont une rédaction très abrégée.)

a) On trouvera $\mathcal{T} - mg \sin\alpha = m\overline{a_x}$, d'où $\overline{a_x} = 1 \cdot m \cdot s^{-2}$.

b) α) • D'une part le fil est inextensible : à chaque instant S et S' ont la même vitesse et la même accélération.
• D'autre part les sens positifs de x'x et y'y sont choisis de façon que si S se déplace dans le sens positif, S' se déplace dans le sens positif.
• Compte tenu de ces deux remarques, les accélérations algébriques $\overline{a_x}$ et $\overline{a_y}$ sont égales : $\overline{a_y} = 1\ m \cdot s^{-2}$.

β) • Rappelons qu'un brin de fil, de masse négligeable, exerce ou subit des forces : ces forces ont le même module qui mesure la tension du fil.
• Le brin de fil de droite exerce la force $\vec{\mathcal{T}'}$ sur le solide S'. On trouvera $m'g - \mathcal{T}' = m'\overline{a_y}$. (1)
• La poulie étant parfaite (moment d'inertie nul, frottements sur l'axe nuls) et le fil sans masse, les tensions des deux brins de fil sont égales : $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.



D'où, d'après (1), $m' = \dfrac{\mathcal{T}}{g - \overline{a_y}} = 0{,}4$ kg.

c) α) Présentation de la démarche suggérée par les questions *a* et *b* : on repère les mouvements de S et S′, liés par un fil inextensible, sur des axes orientés de façon que S et S′ puissent progresser simultanément dans les sens positifs, alors les accélérations algébriques sont les mêmes; on applique le théorème du centre d'inertie à S, à S′; on tient compte que la poulie étant parfaite (moment d'inertie nul, pas de frottements sur l'axe) et le fil sans masse, les tensions des deux brins de fil sont égales.

• On trouvera :

— d'après le théorème du centre d'inertie appliqué à S,

$$\mathcal{T} - mg \sin \alpha = m\overline{a_x} \qquad (1)$$

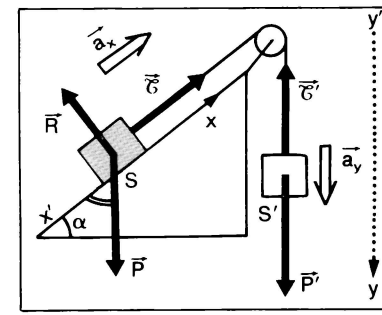
— d'après le théorème du centre d'inertie appliqué à S′,

$$m'g - \mathcal{T}' = m'\overline{a_y} \qquad (2)$$

— d'après $\overline{a_x} = \overline{a_y}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, en ajoutant (1) et (2),

$m'g - mg \sin \alpha = (m + m')\overline{a_y}$,

d'où $\overline{a_y} = \dfrac{m' - m \sin \alpha}{m + m'} g = 2{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



β) Réponse : $\overline{v_x} = \overline{v_y}$;
d'après $\overline{v_y^2} - 0^2 = 2\overline{a_y}(y - y_0)$; $\overline{v_x} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, c'est la vitesse acquise par S.

γ) Le fil est détendu : $\vec{\mathcal{T}} = \vec{0}$.

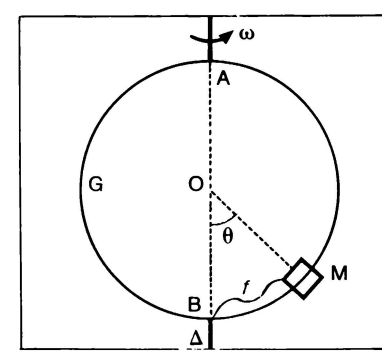
• D'après le théorème du centre d'inertie appliqué à S :
$\overline{a_x} = -g \sin \alpha = -5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

• Le solide S, après détente du fil, parcourt donc encore la distance Δx avant de rebrousser chemin, telle que $0^2 - \overline{v_x^2} = 2\overline{a_x}\Delta x$, d'où $\Delta x = 0{,}4$ m.

Remarque : on pouvait aussi appliquer le théorème de l'énergie cinétique pour évaluer Δx :

$$0 - \frac{1}{2} m v_x^2 = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}} = -mg \, \Delta x \sin \alpha \text{ d'où } \Delta x = \frac{v_x^2}{2g \sin \alpha} = 0{,}4 \text{ m}.$$

E 32. *Une glissière* G *a la forme d'un cercle de centre* O, *de rayon* r = 0,4 m. *Elle peut tourner autour d'un axe vertical fixe,* Δ, *passant par son diamètre* AB.
Une masse M, *enfilée sur la glissière peut glisser le long de celle-ci sans frottement. Ses dimensions sont négligeables devant celles de la glissière, sa masse* m = 100 g. *On donne* $g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.
M *est relié au point* B *par un fil* f, *souple, inextensible, de masse négligeable, de longueur* $\ell = r$.
On fait tourner la glissière G *autour de* Δ, *à la vitesse angulaire constante* ω rad·s^{-1}.



a) *Pour quelle valeur* θ_0 *de* θ *le fil se tend-il?*

b) *Pour une certaine valeur de* ω, *la masse* M *se stabilise par rapport à la glissière, fil non tendu. Quelle est alors la relation entre* θ *et* ω?

c) α) *A partir de quelle valeur* ω_1 *la masse* M *part-elle de la position* B? *A partir de quelle valeur* ω_2 *le fil se tend-il?*

β) *Représenter graphiquement la variation de* θ *en fonction de* ω *pour* $\omega \in [0;\ 10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}]$.

d) *La vitesse de rotation est* $\omega_3 = 10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, *quelle est la tension du fil?*

S 32. *a*) Lorsque le fil est tendu, le triangle OBM est équilatéral (OB = OM = r et BM = ℓ = r); par suite l'angle $\widehat{BOM}$ est alors égal à $\theta_0 = 60°$.

Remarquons que c'est la valeur maximale que pourra prendre l'angle θ.

b) • Le système est le solide M.

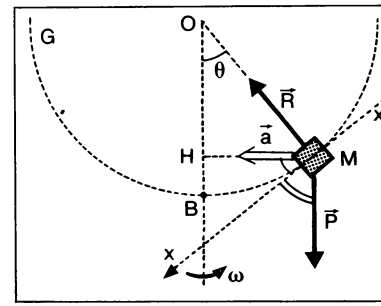
• Le repère lié à la Terre est pratiquement galiléen.

• Le solide est soumis :

— à son poids $\vec{P}$ dû à la Terre;

— à l'action de la glissière $\vec{R}$, perpendiculaire à la glissière puisqu'il n'y a pas de frottement, donc pointant vers le centre O.

Remarquons que le fil f détendu n'exerce aucune action (pour alléger la figure, il n'a pas été représenté ci-contre).



• Le régime de rotation établi, le solide M décrit un cercle horizontal de centre H, de rayon HM = r sin θ, à la vitesse angulaire constante ω.

L'accélération $\vec{a}$ de M est donc un vecteur centripète, de module constant $a = r \sin\theta\ \omega^2$.

• D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}.$$

• Projetons sur l'axe $x'x$, perpendiculaire à OM :

$$P \sin\theta + 0 = ma\cos\theta = mr \sin\theta\omega^2 \cos\theta.$$

D'où $P = mr\omega^2 \cos\theta$ et $\cos\theta = \dfrac{mg}{mr\omega^2} = \dfrac{g}{r\omega^2} = \dfrac{25}{\omega^2}$ en unités S.I.

c) α) • La masse quitte B lorsque θ devient supérieur à zéro, donc pour $\cos\theta < 1$, par suite pour $\dfrac{25}{\omega^2} < 1$, soit pour $\omega > 5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = \omega_1$.

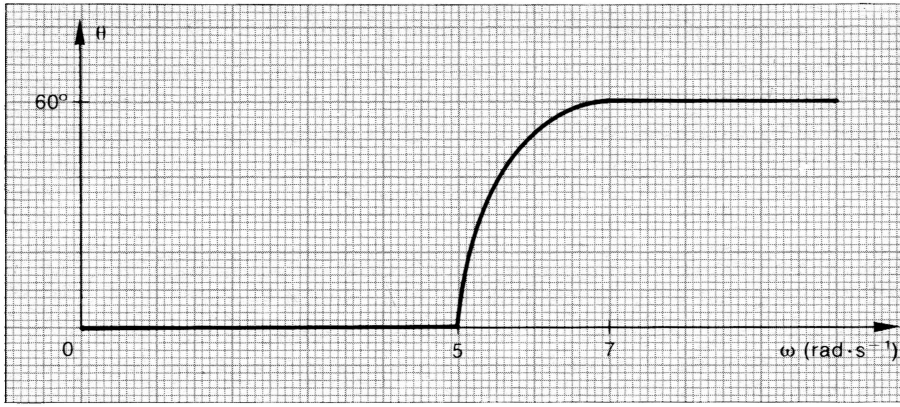
• Le fil f reste détendu tant que θ reste inférieur à 60°, donc pour $\cos\theta > 0{,}5$, par suite pour $\dfrac{25}{\omega^2} > 0{,}5$, soit pour $\omega < 7{,}07\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. A partir de $\omega_2 = 7{,}07\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ le fil se tend.

β) La courbe représentant θ en fonction de ω présente trois parties :

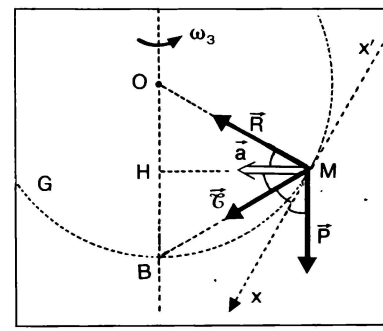
— pour $\omega \leqslant \omega_1$, $\theta = 0$;

— pour $\omega_1 < \omega < \omega_2$, $\cos\theta = \dfrac{25}{\omega^2}$ (on précisera plusieurs points pour la tracer);

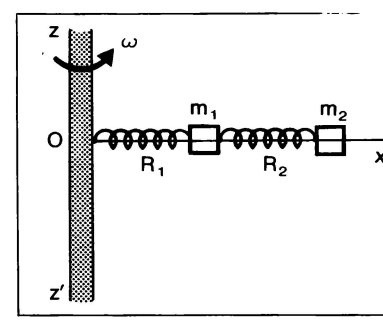
— pour $\omega \geqslant \omega_2$, $\theta = \theta_0 = 60°$.



d) (Nous ne donnons que quelques indications et la réponse.)
Même démarche qu'au *b*), mais cette fois-ci le fil tendu exerce une force $\vec{\mathcal{C}}$.
Remarque que tous les angles marqués sur la figure sont égaux à 30°.
$\vec{P}+\vec{R}+\vec{\mathcal{C}}=m\vec{a}$, une projection sur x'x perpendiculaire à $\vec{R}$, conduit à :
$P\cos 30° + \mathcal{C}\cos 30° = ma\cos 60°$
avec $a = r\cos 30°\ \omega_3^2$,
d'où $\mathcal{C} = mr\omega_3^2\cos 60° - P = 1$ N.



E 33. *Deux ressorts identiques* R_1 *et* R_2*, de masse négligeable, ont pour longueur à vide* $\ell_0 = 0{,}2$ m, *leur coefficient de raideur* $k = 40\ N\cdot m^{-1}$.
Une barre z'z verticale est soudée en O *à une tige* Ox *horizontale.*
On enfile sur cette tige :
— *le ressort* R, *fixé en* O;
— *une masse ponctuelle* m_1 *fixée à* R_1;
— *le ressort* R_2 *fixé à* m_1 *d'un côté et à une autre masse ponctuelle* m_2 *de l'autre.*
La barre z'z, en tournant sur elle-même, entraîne l'ensemble dans son mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire $\omega = 10\ rad\cdot s^{-1}$.
Quels sont les allongements b_1 *et* b_2 *des ressorts* R_1 *et* R_2?
Données : $m_1 = 50$ g; $m_2 = 20$ g; *on néglige les frottements le long de* Ox.



S 33. (Nous ne donnons que les indications et les réponses.)
• Système m_1 subit $\vec{P_1}$, $\vec{F_1} \perp \overrightarrow{Ox}$, $\vec{\mathcal{C}_1}$ et $\vec{\mathcal{C}_2'}$;
accélération $\vec{a_1}$ centripète de module $(\ell_0 + b_1)\omega^2$;

$$\vec{P_1}+\vec{F_1}+\vec{\mathcal{C}_1}+\vec{\mathcal{C}_2'} = m_1\vec{a_1}$$
$$\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2' = m_1 a_1$$
$$kb_1 - kb_2 = m_1(\ell_0 + b_1)\omega^2. \qquad (1)$$

• Système m_2 : subit $\vec{P}_2$, $\vec{F}_2 \perp \overrightarrow{Ox}$, $\vec{\mathcal{C}}_2$;
accélération $\vec{a}_2$ centripète de module $(2\ell_0 + b_1 + b_2)\omega^2$;

$$\vec{P}_2 + \vec{F}_2 + \vec{\mathcal{C}}_2 = m_2\vec{a}_2$$
$$kb_2 = m_2(2\ell_0 + b_1 + b_2)\omega^2 \qquad (2)$$

• Les équations (1) et (2) conduisent à $b_1 = 5{,}6$ cm et $b_2 = 2{,}4$ cm.

E 34. *Une cage est en translation rectiligne horizontale, son vecteur accélération* $\vec{a}$ *par rapport à la Terre, est constant. Une tige* Ot *est fixée en* O *au plafond de la cage, elle est inclinée à contre-sens de* $\vec{a}$, *d'un angle* θ *par rapport à la verticale. Sur cette tige* Ot *sont enfilés : un ressort de raideur* k *fixé en* O, *une masse* m *accrochée à l'extrémité inférieure du ressort. La longueur du ressort à vide est* ℓ_0.
Exprimer en fonction de a :

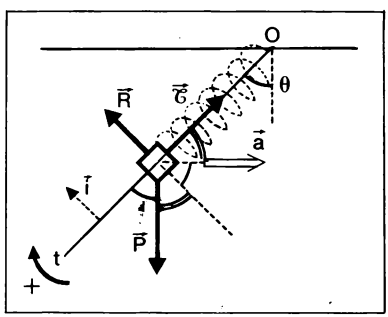
α) *l'allongement* b *du ressort;*

β) *la force* $\vec{R}$ *de l'action de la tige sur la masse* m;

γ) *le moment, par rapport à l'axe horizontal* Δ *perpendiculaire à* $\vec{a}$ *et passant par* O, *de la force* $\vec{F}$, *action de la masse sur la tige.*

S 34. α) Réponse :

$$b = \frac{m(g\cos\theta + a\sin\theta)}{k}.$$



β) • Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire parallèle à $\vec{R}$, posons $\vec{R} = \overline{R}\vec{i}$.
En projetant $\vec{P} + \vec{R} + \vec{\mathcal{C}} = m\vec{a}$ sur $\vec{i}$ (c'est-à-dire en multipliant scalairement cette égalité par $\vec{i}$) on trouve :

$$-P\sin\theta + \overline{R} = -ma\cos\theta,$$

d'où $\overline{R} = m(g\sin\theta - a\cos\theta)$.

• *Discussion :*
— si $g\sin\theta - a\cos\theta > 0$, c'est-à-dire si $a < g\,\mathrm{tg}\,\theta$, $\overline{R} > 0$ et $\vec{R}$ a le sens indiqué sur la figure;
— si $a = g\,\mathrm{tg}\,\theta$, $\vec{R} = \vec{0}$;
— si $a > g\,\mathrm{tg}\,\theta$, $\overline{R} > 0$, $\vec{R}$ a le sens opposé à $\vec{i}$.

γ) • La force $\vec{F}$ est la force réciproque de $\vec{R}$: $\vec{F} = -\vec{R}$ d'où, en posant $\vec{F} = \overline{F}\vec{i}$, $\overline{F} = -\overline{R}$.

• Prenons le sens + pour mesurer $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}}$ dans le sens indiqué sur la figure. En remarquant que la distance entre le support de $\vec{F}$ et Δ est $(\ell_0 + b)$, le moment de $\vec{F}$ a pour expression $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = \overline{F} \times (\ell_0 + b)$ soit :

$$\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = -m(g\sin\theta - a\cos\theta)\left[\ell_0 + \frac{m(g\cos\theta + a\sin\theta)}{k}\right].$$

$\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}}$ est une fonction du second degré de la variable positive a.

• Note : on pourra vérifier que pour $a < g\,\mathrm{tg}\,\theta$, $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} < 0$; pour $a = g\,\mathrm{tg}\,\theta$, $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = 0$; pour $a > g\,\mathrm{tg}\,\theta$, $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} > 0$.

POURQUOI ?

• *L'expression d'un produit scalaire, la coordonnée d'un vecteur (voir* ℳ 12*) font intervenir des angles notés* $(\overrightarrow{xx'}, \vec{F})$ *par exemple. Comment ne pas se tromper pour évaluer cet angle?*

L'angle $(\overrightarrow{x'x}, \vec{F})$ est l'angle dont il faudrait faire tourner $\overrightarrow{x'x}$ pour qu'il coïncide en direction et en sens avec $\vec{F}$.

• *Quand on parle de la vitesse d'un skieur, de la vitesse d'un train, sans préciser davantage, que faut-il comprendre?*

Il faut supposer que ces objets sont assimilés à des solides en translation, dans ce cas la vitesse (ou l'accélération) de G se confond avec la vitesse (ou l'accélération) de l'ensemble.

• *Pourquoi dans certains énoncés* g *est exprimé en* $N \cdot kg^{-1}$, *dans d'autres en* $m \cdot s^{-2}$?

D'après la formule $P = mg$, si P est exprimé en N, m en kg, g s'exprime bien en $N \cdot kg^{-1}$.
Considérons un objet en mouvement dans un repère galiléen sous l'action uniquement de son poids (dans le prochain chapitre nous étudierons en détails ce type de mouvement) : d'après le théorème du centre d'inertie $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$, d'où $\vec{g} = \vec{a}$. Le vecteur $\vec{g}$ se confond avec le vecteur $\vec{a}$, g peut donc s'exprimer aussi en $m \cdot s^{-2}$ qui est l'unité internationale d'accélération.

• *Est-ce que les expressions norme, module, intensité, valeur, grandeur d'une force sont synonymes?*

On peut faire de subtils distinguo, nous considérerons ces expressions comme équivalentes.

• *Quelle est la distinction entre principe fondamental de la dynamique et théorème du centre d'inertie?*

Le principe fondamental est valable aussi bien en mécanique newtonienne qu'en mécanique relativiste, le théorème du centre d'inertie n'est valable qu'en mécanique newtonienne (et tous les deux bien sûr dans un repère galiléen). Certains auteurs ou professeurs (donc certains énoncés de problème) ne font pas la distinction et nomment les deux lois « principe fondamental de la dynamique ».

• *Quelle est la différence entre un repère d'espace et un référentiel?*

Considérons un repère lié à la Terre, par exemple un trièdre trirectangle dont le sommet est un coin de la salle de classe et dont les axes coïncident avec les arêtes des murs et du plafond. On peut aussi utiliser un autre repère lié à la Terre partant d'un autre coin de la classe, d'un point du couloir, ... Tous ces repères d'espaces sont accrochés au même solide Terre, on dit que l'ensemble de ces repères d'espace appartiennent au référentiel terrestre. Un référentiel est donc l'ensemble des repères d'espace liés au même solide de référence.

• *Est-ce qu'il existe un repère galiléen parfait?*

Le repère de Copernic défini par trois axes partant du centre d'inertie du système solaire et pointant vers trois étoiles lointaines est galiléen à la précision excellente de 10^{-10}! On l'utilise pour étudier le mouvement des planètes, des comètes, des vaisseaux interplanétaires...
On montre que tout repère en translation rectiligne et uniforme par rapport au trièdre de Copernic est aussi « bon » que ce dernier.
Le repère géocentrique (voir $\mathcal{M}$ 13) est en translation, mais pas rectiligne, par rapport au repère de Copernic : il est moins bon.
Le repère terrestre n'est pas en translation (la Terre tourne sur elle-même et autour du Soleil), il est encore moins bon.
Remarque : Un wagon en translation rectiligne et uniforme par rapport à la Terre est de même « qualité galiléenne » que la Terre : on peut le considérer comme pratiquement galiléen. Cela n'est plus vrai pour un repère qui tourne par rapport à la Terre ou qui est en translation accélérée (revoir le n° 21).

• *Qu'est ce qu'une force d'inertie?*

Dans un repère galiléen, les seules forces qui existent sont des forces dues à des objets (c'est d'ailleurs pour éviter que vous inventiez des forces que systématiquement nous mentionnons l'auteur de la force).
Dans un repère non galiléen, la relation fondamentale de la dynamique $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ n'est plus valable. Pour continuer à l'appliquer il faut ajouter des forces correctives, qui ne sont pas dues à des objets, et qu'on appelle force d'inertie. Ainsi reprenons l'exercice 25. Considérons un observateur assis sur le manège, en d'autres termes considérons un repère non galiléen lié au manège en rotation. Dans ce repère, G (centre d'inertie de l'ensemble « passager-nacelle ») est en équilibre, sous l'action de la tension $\vec{\mathcal{C}}$ due à la chaîne, du poids $\vec{P}$ dû à la Terre et d'une force corrective, dite force d'inertie $\vec{\varphi}$, telle que :

$$\vec{P} + \vec{\mathcal{C}} + \vec{\varphi} = \vec{0}.$$

En raisonnant dans un repère galiléen nous avons trouvé que les mêmes forces $\vec{P}$ et $\vec{\mathcal{C}}$ étaient telles que $\vec{P} + \vec{\mathcal{C}} = (M+m)\,\vec{a}$ soit $\vec{P} + \vec{\mathcal{C}} - (M+m)\,\vec{a} = \vec{0}$. La force d'inertie est donc $\vec{\varphi} = -(M+m)\,\vec{a}$: elle est de même direction que $\vec{a}$, de sens opposé : elle est centrifuge. On dit dans ce cas que $\vec{\varphi}$ est une force d'inertie centrifuge.
Conclusion : comme nous raisonnons systématiquement dans des repères galiléens ou quasi galiléens, il n'interviendra que des forces dues à des objets et jamais de force d'inertie.

• *Pourquoi précise-t-on parfois qu'un ressort est à spires non jointives?*

Un ressort à spires jointives (sous-entendu lorsqu'il est au repos), ne peut pas être comprimé. Un ressort à spires non jointives peut être comprimé ou tendu.

• *Pourquoi dans certains exercices, tels le n° 19, écrit-on* $m = 0{,}10$ kg; $v = 0{,}30$ m·s^{-1}; *le zéro terminal ne servant mathématiquement à rien?*

Lorsqu'on met un zéro terminal c'est pour insister sur la précision avec laquelle la mesure a été faite. Ainsi $m = 0{,}10$ kg signifie qu'on a évalué la masse à 0,01 kg près; $v = 3{,}0$ m·s^{-1} signifie qu'on a évalué la vitesse à 0,1 m·s^{-1} près.

En général on se contente, quand on ne «sent» pas la précision souhaitée par l'énoncé, de donner le résultat avec 3 chiffres significatifs.
Un nombre a 3 chiffres significatifs s'il peut être écrit sous la forme a, bc·10^n (a chiffre autre que zéro, b et c chiffres quelconques, n nombre entier positif ou négatif).
Exemples : 103 m = 1,03·10^2 m; 6,04·10^{14} électrons; 2,17·10^{-8} C ... sont des résultats à 3 chiffres significatifs. Ne tombez pas dans le ridicule d'écrire $v = 4{,}107\,371$ m·s^{-1}, écrivez $v = 4{,}11$ m·s^{-1}.

• *Pourquoi sur certaines figures mettez-vous le sens du déplacement et pas sur d'autres?*

Nous indiquons le sens du déplacement lorsqu'il intervient des forces de frottement, en effet ces dernières doivent toujours avoir un sens opposé à celui du déplacement.

• *Peut-on avoir une règle simple pour vérifier qu'une formule littérale a des chances d'être bonne?*

Une formule est dite littérale lorsque toutes les grandeurs qui interviennent y figurent par des lettres (aucune grandeur ne doit être remplacée par une valeur numérique). Chaque lettre «apporte» sa dimension, ainsi v «apporte» le m·s^{-1}; t apporte s; F apporte N; ... Toutes ses dimensions ne sont pas indépendantes ainsi d'après F = ma, N = kg·m·s^{-2}, ...
Une formule littérale doit être homogène, c'est-à-dire que les deux grandeurs de part et d'autre du trait égal doivent avoir la même dimension. Si l'homogénéité n'est pas vérifiée on peut affirmer que la formule littérale est fausse, si l'homogénéité est vérifiée on ne peut malheureusement rien affirmer.

(Il faut savoir que le radian, d'après la formule $s = R\theta$, revoir *M* 5, n'a pas de dimension puisque $\text{rad} = \frac{\text{m}}{\text{m}}$).
Il est donc conseillé dans un problème :
— d'établir l'expression littérale (en définissant les lettres non utilisées par l'énoncé);
— de vérifier que l'expression littérale est homogène;
— enfin de faire l'application numérique.
L'homogénéité peut aussi venir au secours de la mémoire, ainsi recherchez grâce à l'homogénéité la «bonne» formule dans $\left\{a = \frac{v}{R};\ a = Rv^2;\ a = \frac{v^2}{R};\ a = Rv\right\}$.

3 CHAMP DE GRAVITATION

E 35. *Considérons un atome d'hydrogène isolé : il est constitué d'un électron (charge* $-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; *masse* $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg) *et d'un proton (charge* $+e$; *masse* $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg).
Donner les caractéristiques des forces de gravitation $\overrightarrow{F_G}$ *et électrostatique* $\overrightarrow{F_E}$ *exercées par le proton sur l'électron lorsque la distance proton-électron est* $d = 5 \cdot 10^{-11}$ m. *Conclure.*
Données :
— *la constante de gravitation universelle est* $\varepsilon = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *en unités* S.I.;
— *la force électrostatique a pour module* $F_E = \dfrac{9 \cdot 10^9 e^2}{d^2}$ *en unités* S.I.

19 La loi de Newton.

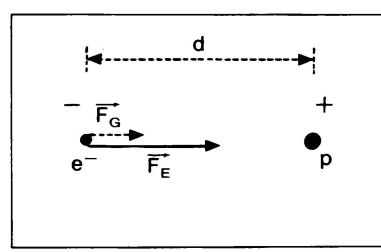
• Entre tous les objets il s'exerce des forces, toujours attractives, dites *forces de gravitation.*
• *Entre deux objets ponctuels.*
Soit O_1 et O_2 deux objets ponctuels de masse m_1 et m_2, situés à $d = O_1O_2$ l'un de l'autre.
— L'objet O_2 exerce sur l'objet O_1 une force attractive $\overrightarrow{f_{2/1}}$, de direction O_1O_2, de sens O_1 vers O_2, de module :

$$f = \varepsilon \frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

Quels que soient les objets, ε a toujours la même valeur dans un système d'unités donné : c'est la *constante de gravitation universelle.*
— Inversement O_1 exerce sur O_2, la force réciproque $\overrightarrow{f_{1/2}} = -\overrightarrow{f_{2/1}}$.
• *Entre deux objets à répartition sphérique de masse* (objet sphérique dont la masse volumique ne dépend que de la distance au centre O de la sphère), la loi de Newton s'applique encore, *d* désignant alors la distance entre les centres des objets.

S 35. • Le proton exerce sur l'électron une force de gravitation $\overrightarrow{F_G}$, dirigée vers le proton, de module :

$$F_G = \frac{\varepsilon m_e m_p}{d^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 9{,}1 \cdot 10^{-31} \times 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{(5 \cdot 10^{-11})^2} = 4{,}05 \cdot 10^{-47} \text{ N}.$$



• Le proton exerce sur l'électron une force électrostatique $\overrightarrow{F_E}$, dirigée vers le proton car les charges de l'électron et du proton sont de signes opposés, de module :

$$F_E = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot e^2}{d^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \times (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{(5 \cdot 10^{-11})^2} = 9{,}22 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

• Le rapport $\frac{F_E}{F_G} = \frac{9{,}22 \cdot 10^{-8}}{4{,}05 \cdot 10^{-47}} = 2{,}3 \cdot 10^{39}$, il est très grand : F_G est tout à fait négligeable devant F_E.

E 36. *Un satellite est à l'altitude* $z = 600$ km *au-dessus de la Terre. Sa masse est* $m = 5$ t. *Le satellite est situé à la distance* $d_L = 3{,}77 \cdot 10^5$ km *du centre de la Lune et à la distance* $d_S = 1{,}49 \cdot 10^8$ km *du centre du Soleil.*

a) *Quelles sont les intensités des forces de gravitation* F_T, F_L *et* F_S *exercées respectivement par la Terre, la Lune, le Soleil sur le satellite? Conclure.*
Données :
— *la constante de gravitation universelle est* $\varepsilon = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *unités* S.I.;
— *les masses de la Terre, de la Lune, du Soleil sont respectivement* $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg; $M_S = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg;
— *le rayon de la Terre* $R = 6{,}4 \cdot 10^3$ km.

b) *Le satellite s'éloigne de la Terre dans la direction de la Lune. Jusqu'à quelle distance* d, *mesurée à partir du centre de la Terre, peut-on négliger au millième près la force de gravitation lunaire?*
(*La distance centre de la Terre-centre de la Lune est* $D = 3{,}84 \cdot 10^5$ km.)

S 36. *a*) • On suppose :
— que le satellite est pratiquement ponctuel par rapport à la Terre, la Lune ou le Soleil;
— que la Terre, la Lune et le Soleil sont des objets sphériques dont la masse volumique ne dépend que de la distance à leur centre.
• La loi de Newton permet alors d'évaluer :

$$F_T = \frac{\varepsilon m M_T}{(R+z)^2} = 4{,}07 \cdot 10^4 \text{ N};$$

$$F_L = \frac{\varepsilon m M_L}{d_L^2} = 0{,}172 \text{ N};$$

$$F_S = \frac{\varepsilon m M_S}{d_S^2} = 29{,}7 \text{ N}.$$

• Conclusion : les forces de gravitation F_L et F_S sont négligeables devant la force de gravitation terrestre. Il en est de même pour tous les objets au voisinage de la Terre.

b) Lorsque le satellite est à la distance d du centre de la Terre, il est à la distance $(D - d)$ du centre de la Lune, alors $F_L = \frac{F_T}{1000}$.

D'où $\frac{\varepsilon m M_L}{(D-d)^2} = \frac{\varepsilon m M_T}{1000\, d^2}$, soit $1000\, M_L d^2 = M_T (D-d)^2$.
On aboutit à l'équation du second degré en d :

$$(1000\, M_L - M_T) d^2 + 2 M_T D d - M_T D^2 = 0.$$

L'unique solution positive est $d = 8{,}53 \cdot 10^7$ m $= 8{,}53 \cdot 10^4$ km.
Ainsi jusqu'à l'altitude $(d - R) = 8{,}53 \cdot 10^4 - 6{,}4 \cdot 10^3 \simeq 79\,000$ km, on peut négliger au millième près la force de gravitation lunaire. En d'autres termes pour les satellites terrestres, seule la force de gravitation terrestre joue un rôle.

E 37. *On suppose que la Terre est sphérique, de rayon* R, *de masse* M, *et qu'elle possède une répartition de masse à symétrie sphérique.*

a) *Une masse* $m = 10$ kg, *pratiquement ponctuelle est placée à sa surface.*
Quelle force de gravitation subit-elle?
En déduire le champ de gravitation G_0 *de la Terre à l'altitude zéro.*

b) *Montrer qu'à l'altitude* z *au-dessus de la Terre, le champ de gravitation* G *est donné par la relation :*

$$G = G_0 \cdot \frac{R^2}{(R+z)^2}.$$

c) *Montrer que si* z *est très faible devant* R, G *est pratiquement fonction affine de* z.

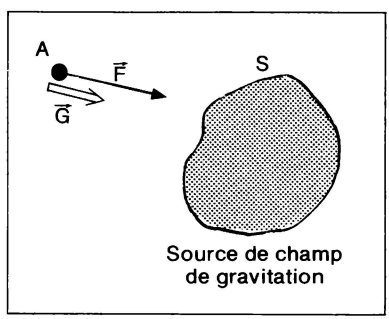
d) *Soit deux points* A *et* B : A *est à l'altitude* $z_A = 0$, B *est à l'altitude* $z_B = 10$ km *au-dessus du point* B′ *de la surface de la Terre, la distance* $AB' = d = 10$ km.
Quel est l'angle entre $\overrightarrow{G_A}$ *et* $\overrightarrow{G_B}$?
Quelle est la variation relative $\dfrac{G_B - G_A}{G_A}$?
Que peut-on en déduire relativement au champ de gravitation dans une zone de dimensions réduites?
Données :
— *constante de gravitation universelle* $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *unités* S.I.;
— *masse de la Terre :* $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;
— *rayon de la Terre :* $R = 6\,380$ km;
— *si* α *est un nombre, sans dimension, très inférieur à* 1, *alors* $(1+\alpha)^n \simeq 1 + n\alpha$.

20 Champ de gravitation.

• Soit A un point de l'espace champ de gravitation entourant un objet pesant, S, appelé source du champ de gravitation.
• Plaçons en A une masse ponctuelle m, celle-ci est soumise à la force de gravitation $\vec{F}$ due à S.
• Par définition le rapport :

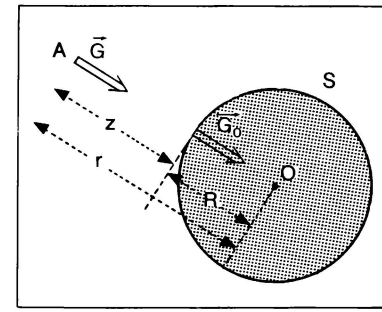
$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$$

est appelé *le vecteur champ de gravitation* en A dû à S.
L'intensité G du champ de gravitation s'exprime en $N \cdot kg^{-1}$.



Source de champ de gravitation

21 **Champ de gravitation d'un objet ponctuel ou présentant une répartition sphérique de masse.**



• Dans ce cas la force de gravitation $\vec{F}$ en A est donnée par la loi de Newton : $\vec{F}$ est dirigée vers le centre O de la source S, son module $F = \frac{\varepsilon m M}{r^2}$ (m masse de l'objet ponctuel placé en A, M masse de la source S, r distance AO).

• Par suite le vecteur champ de gravitation $\vec{G}$ en A est un vecteur :

— de direction OA (on dit qu'il est radial);

— de sens A vers O (on dit qu'il est centripète);

— de module :

$$\mathbf{G = \frac{\varepsilon M}{r^2}} \cdot \qquad (1)$$

• Si la source est un objet sphérique de rayon R (présentant, rappelons-le, une répartition sphérique de masse), on appelle intensité du champ de gravitation à la surface de la source, le nombre $G_0 = \frac{\varepsilon M}{R^2}$. Par suite $\varepsilon M = G_0 R^2$.

Dans ce cas l'expression (1) peut aussi s'écrire $\mathbf{G = \frac{G_0 R^2}{r^2}}$.

• Remarque : si z désigne l'altitude de A par rapport à la source sphérique, $r = R + z$.

S 37. *a*) • La loi de Newton s'applique puisque la masse m est ponctuelle et que la Terre a une répartition de masse à symétrie sphérique.

Par suite, la masse m est soumise à la force de gravitation $F_0 = \frac{\varepsilon m M}{R^2}$.

• Numériquement $F_0 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 10 \times 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6{,}38 \cdot 10^6)^2} = 98$ N.

• Le vecteur champ de gravitation $\vec{G_0} = \frac{\vec{F_0}}{m}$ a pour module :

$$G_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{98}{10} = 9{,}8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

b) Considérons la masse m à l'altitude z, donc à la distance $r = R + z$ du centre de la Terre. Cette masse subit la force de gravitation $F = \frac{\varepsilon m M}{(R+z)^2}$.

Le champ de gravitation à cette altitude $G = \frac{F}{m} = \frac{\varepsilon M}{(R+z)^2}$. (1)

Comme $G_0 = \frac{\varepsilon M}{R^2}$ (2), en faisant le rapport (1) sur (2) :

$$\frac{G}{G_0} = \frac{R^2}{(R+z)^2}, \text{ d'où } G = G_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}. \quad (3)$$

c) • Présentation de la démarche : lorsqu'on veut utiliser la formule d'approximation $(1+\alpha)^n \simeq 1+n\alpha$, il faut faire intervenir un rapport α, entre deux grandeurs de même nature, très petit devant 1 : le rapport $\alpha = \frac{z}{R}$ est de ce type.

• Divisons le numérateur et le dénominateur de l'expression (3) par R^2 : $G = G_0 \frac{1}{\left(1+\frac{z}{R}\right)^2}$.

Comme $\frac{1}{\left(1+\frac{z}{R}\right)^2} = \left(1+\frac{z}{R}\right)^{-2}$ il s'ensuit : $\frac{1}{\left(1+\frac{z}{R}\right)^2} \simeq 1-\frac{2z}{R}$.

D'où $G = G_0\left(1-2\frac{z}{R}\right) = G_0 - \frac{2G_0}{R}z$: G est bien fonction affine décroissante de z.

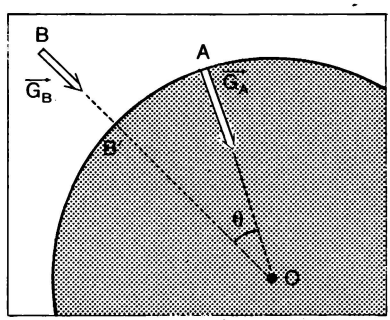
d) • L'angle entre $\overrightarrow{G_A}$ et $\overrightarrow{G_B}$ est l'angle $\widehat{AOB'} = \theta$.

Assimilons la distance $AB' = d$ à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB'}$.

En radians : $\theta = \frac{\overset{\frown}{AB'}}{R}$ (revoir ℳ 5),

d'où $\theta = \frac{10}{6\,380} = 1{,}57 \cdot 10^{-3}$ rad $= 5{,}39'$,

cet angle est très faible.



• D'après la fonction affine établie au *c)*, valable puisque z_B est très inférieure à R, $G_B = G_0 - \frac{2G_0}{R}z_B$.

D'autre part $G_A = G_0$, par suite $G_B - G_A = -\frac{2G_0}{R}z_B$. La variation relative est alors $\frac{G_B - G_A}{G_A} = \frac{-2z_B}{R} = \frac{-2 \times 10}{6\,380} = -3{,}13 \cdot 10^{-3}$.

• Conclusion : si on se limite à une zone de dimensions réduites (par exemple 10 km × 10 km × 10 km) on peut dire avec une très bonne approximation :
— que les vecteurs $\overrightarrow{G}$ sont parallèles entre eux;
— que les vecteurs $\overrightarrow{G}$ sont de même norme.
Dans une telle zone le champ de gravitation est pratiquement uniforme.

E 38. *A la surface de la Lune le champ de gravitation a pour intensité* $G_{L,0} = 1{,}62\ N \cdot kg^{-1}$.
Sachant que le rayon de la Lune, supposé sphérique, est $R_L = 1738$ km, *en déduire la masse de la Lune (on précisera les approximations nécessaires au calcul).*
Donnée : constante de gravitation universelle $\varepsilon = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ en unités S.I.

S 38. Réponses :
— supposer que la Lune admet une répartition de masse à symétrie sphérique pour pouvoir appliquer la loi de Newton;
— la masse de la Lune $M_L = \dfrac{G_{L,0} \cdot R_L^2}{\varepsilon} = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg.

E 39. *(Mouvement d'un satellite.)*
On suppose que le repère géocentrique dont l'origine coïncide avec le centre O *de la Terre est constamment galiléen.*

a) *Un satellite artificiel décrit une trajectoire circulaire autour de la Terre, de centre* O, *de rayon* r.

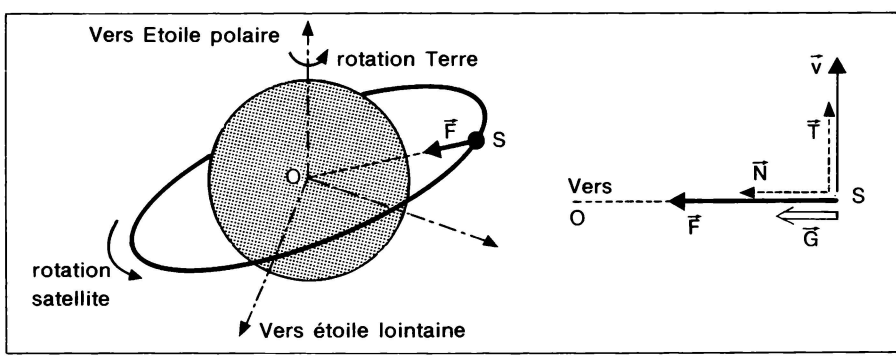
α) *Déterminer sa vitesse* v. *On appellera* M *la masse de la Terre et* ε *la constante de gravitation.*
Application numérique : $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $\varepsilon = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $r = 7000$ km.

β) *Exprimer la période* T *du satellite en fonction de* r, ε et M. *La calculer.*

b) *On considère maintenant la Lune, satellite naturel de la Terre. En première approximation on peut considérer que la Lune décrit une trajectoire circulaire autour de la Terre. Sachant que la distance Terre-Lune vaut* $r_L = 384\,000$ km, *calculer la période de la Lune (le résultat sera exprimé en jours).*

(D'après bac)

S 39. *a*) Ci-dessous nous représentons la Terre, l'orbite circulaire du satellite, une vue de détail précisant la base $(\vec{T}, \vec{N})$, le vecteur force de gravitation $\vec{F}$, le vecteur champ de gravitation $\vec{G}$, le vecteur vitesse $\vec{v}$ du satellite.



α) • Système considéré : le satellite.

• Repère : un repère géocentrique d'origine liée au centre O de la Terre et dont les trois axes pointent vers trois étoiles lointaines (en général parmi elles on prend l'Étoile polaire, de cette façon la Terre tourne autour de l'axe O-Étoile polaire).

• Force agissant sur le système : moteur coupé, la seule force qui s'exerce est la force de gravitation $\vec{F}$. Cette force est radiale, centripète comme le vecteur unitaire normal $\vec{N}$: $\vec{F} = \frac{\varepsilon m M}{r^2} \vec{N}$.

• Présentation du vecteur accélération : en coordonnées curvilignes, dans la base $(\vec{T}, \vec{N})$, $\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{r}\vec{N}$ (revoir $\mathcal{M}$ 3).

• D'après le théorème du centre d'inertie : $\vec{F} = m\vec{a}$, soit $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Par suite
$$\dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{r}\vec{N} = \frac{\varepsilon M}{r^2}\vec{N}. \qquad (1)$$

• A partir de (1), on en déduit :

— d'une part que $\dot{v} = 0$, donc $v = C^{te}$: le mouvement du satellite est uniforme;

— d'autre part que $\frac{v^2}{r} = \frac{\varepsilon M}{r^2}$, d'où $v = \sqrt{\frac{\varepsilon M}{r}}$.

• Numériquement $v = 7\,550 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 7{,}55 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

β) • Le mouvement étant circulaire et uniforme, pour effectuer un tour le satellite met le temps $T = \frac{2\pi r}{v}$.

Comme $v = \sqrt{\frac{\varepsilon M}{r}}$, il s'ensuit $T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\varepsilon M}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\varepsilon M}}$. (2)

• Application numérique : $T = 5\,827 \text{ s} = 1 \text{ h } 37 \text{ min } 7 \text{ s}$.

b) • L'expression (2) convient pour tous les satellites de la Terre ayant une orbite circulaire dans le repère géocentrique.

• Si on admet que la Lune a une orbite circulaire autour de la Terre, l'expression (2) convient et permet d'en déduire la période de révolution de la Lune :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_L^3}{\varepsilon M}}$$
$$= 2{,}367 \cdot 10^6 \text{ s}$$
$$= 27{,}4 \text{ j}.$$

E 40. *(Mesure de la masse du Soleil, mouvement des planètes.)*
On repère les mouvements par rapport au repère de Copernic ayant son origine pratiquement au centre O *du Soleil.*
Dans ce repère les 9 planètes ont des trajectoires que l'on assimilera à des cercles.

a) *Déterminer la relation entre le rayon* r *de l'orbite d'une planète, la période* T *de cette planète, la masse* M_S *du Soleil et la constante de gravitation universelle* ε.

b) *En déduire la masse du Soleil sachant que pour la Terre* $r_T = 1{,}5 \cdot 10^8$ km *et* $T_T = 1$ an. *On donne* $\varepsilon = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *unités* S.I.

c) *Quel est le rayon de l'orbite de Mars dont la période est* 1,9 an?
Quelle est la période de Jupiter sachant que son orbite a pour rayon $7{,}8 \cdot 10^8$ km?

S 40. *a*) Refaire la démonstration exposée dans (**S 39** *a*)) : on aboutit à la relation demandée (appelée troisième loi de Képler) $\frac{r^3}{T^2} = \frac{\varepsilon M_s}{4\pi^2}$.

b) La masse du Soleil $M_S = \frac{4\pi^2 r_T^3}{\varepsilon T_T^2} = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

c) • D'après la loi précédente (en mettant l'indice M pour Mars, J pour Jupiter) :

$$\frac{r_T^3}{T_T^2} = \frac{r_M^3}{T_M^2} = \frac{r_J^3}{T_J^2}.$$

• Par suite :

$$r_M = r_T \left(\frac{T_M}{T_T}\right)^{2/3} = 1{,}5 \cdot 10^8 \left(\frac{1{,}9}{1}\right)^{2/3} = 2{,}3 \cdot 10^8 \text{ km};$$

$$T_J = T_T \left(\frac{r_J}{r_T}\right)^{3/2} = 1 \times \left(\frac{7{,}8 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 10^8}\right)^{3/2} = 11{,}8 \cdot 10^8 \text{ km}.$$

E 41. *(Lancement d'un satellite géostationnaire.)*

a) *Pour étudier le départ de la fusée porteuse d'un satellite, on se place d'abord dans un repère lié à la Terre. La fusée part à la date* $t = 0$.
Pendant les 100 premières secondes de vol, on suppose :
— *que la force de poussée* $\vec{F}'$ *est constante, verticale, de module* $F' = 3{,}5 \cdot 10^7$ N;
— *que la fusée éjecte chaque seconde la masse* $\mu = 15$ t *de produits de combustion;*
— *que le vecteur champ de gravitation* $\vec{G}$ *reste constant égal à* $\vec{G}_0$.
La masse de la fusée à la date $t = 0$ *est* $m_0 = 3{,}2 \cdot 10^6$ kg.

α) *Comment varie la masse* m *de la fusée entre* $t = 0$ *et* $t = 100$ s?

β) *Quelle est l'accélération* a *de la fusée à la date* t?

γ) *Tracer la courbe représentant* a *en fonction de* t *pour* $t \in [0; 100 \text{ s}]$.

δ) *Montrer que la vitesse atteinte à* $t = 100$ s *peut s'évaluer graphiquement à partir d'une aire que l'on précisera.*

b) *On se place maintenant dans un repère géocentrique* (Ox, y, z), *l'axe* Oz *pointant vers l'Étoile polaire. Dans ce repère la Terre tourne régulièrement autour de* Oz *dans le sens direct. La fusée part d'un point proche de l'Équateur.*

α) *Quelle est dans ce repère la vitesse initiale* V_0 *de la fusée? Pourquoi les satellites sont-ils lancés dans le même sens de rotation que la Terre? Pourquoi a-t-on intérêt à utiliser une base de lancement proche de l'Équateur?*

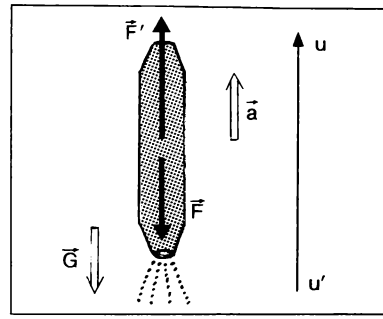
β) *La fusée porte le satellite sur une trajectoire circulaire stationnaire dans le plan de l'Équateur. Quelle vitesse doit avoir le satellite pour rester constamment au-dessus du même point de la Terre? (On dit alors qu'il est géostationnaire.) Quelle est alors son altitude?*
Données : rayon de la Terre $R = 6\,380$ km;
période de rotation de la Terre (ou jour sidéral) $T = 86\,140$ s;
champ de gravitation à l'altitude zéro $G_0 = 9{,}8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

S 41. *a*) α) Chaque seconde la masse de la fusée diminue de μ, à la date t la masse a diminué de μt, elle n'est plus égale qu'à $m = m_0 - \mu t$.

β) • Considérons la fusée à la date t.

• Elle est soumise à la force de poussée $\vec{F'}$ et à la force de gravitation $\vec{F}$ (qui, nous le verrons à la fin de ce chapitre, est pratiquement le poids de la fusée). A la date t, la force de gravitation $\vec{F} = m\vec{G_0}$ (puisque $\vec{G}$ reste égal à $\vec{G_0}$) : cette force n'est pas constante car m varie.

• La fusée, pendant la durée de la phase que nous étudions, a un mouvement de translation vertical : le vecteur accélération $\vec{a}$ est vertical.



• D'après le théorème du centre d'inertie : $\vec{F'} + \vec{F} = m\vec{a}$.

• Projetons sur l'axe vertical ascendant u'u : $F' - F = ma$.

D'où $$a = \frac{F'}{m} - \frac{F}{m} = \frac{F'}{m} - G_0.$$

Remplaçons m par sa valeur en fonction du temps : $a = \dfrac{F'}{m_0 - \mu t} - G_0$.

• Numériquement $a = \dfrac{3{,}5 \cdot 10^4}{3{,}2 \cdot 10^3 - 15\,t} - 9{,}8$ (en unités S.I.).

γ) • Dans l'intervalle [0; 100 s] la fonction précédente est définie, continue, croissante (en effet si t augmente, le dénominateur du premier terme diminue, donc ce terme positif augmente).

• On calculera ensuite, pour tracer avec précision la courbe ci-dessous, a pour diverses valeurs de t :

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
a	1,14	1,67	2,27	2,93	3,66	4,49	5,42	6,48	7,70	9,12	10,8

δ) • Soit t_1 une date quelconque de l'intervalle, à cet instant l'accélération a la valeur a_1, la vitesse la valeur v_1.

• Soit t_2 une date juste après t_1, on peut poser $t_2 = t_1 + \delta t$: δt est une durée très faible. A la date t_2, l'accélération est pratiquement égale à a_1, la vitesse est v_2.

• Entre t_1 et t_2, le mouvement est pratiquement rectiligne uniformément varié, donc $v_2 = a_1 \delta t + v_1$, soit $v_2 - v_1 = \delta v = a_1 \delta t$.

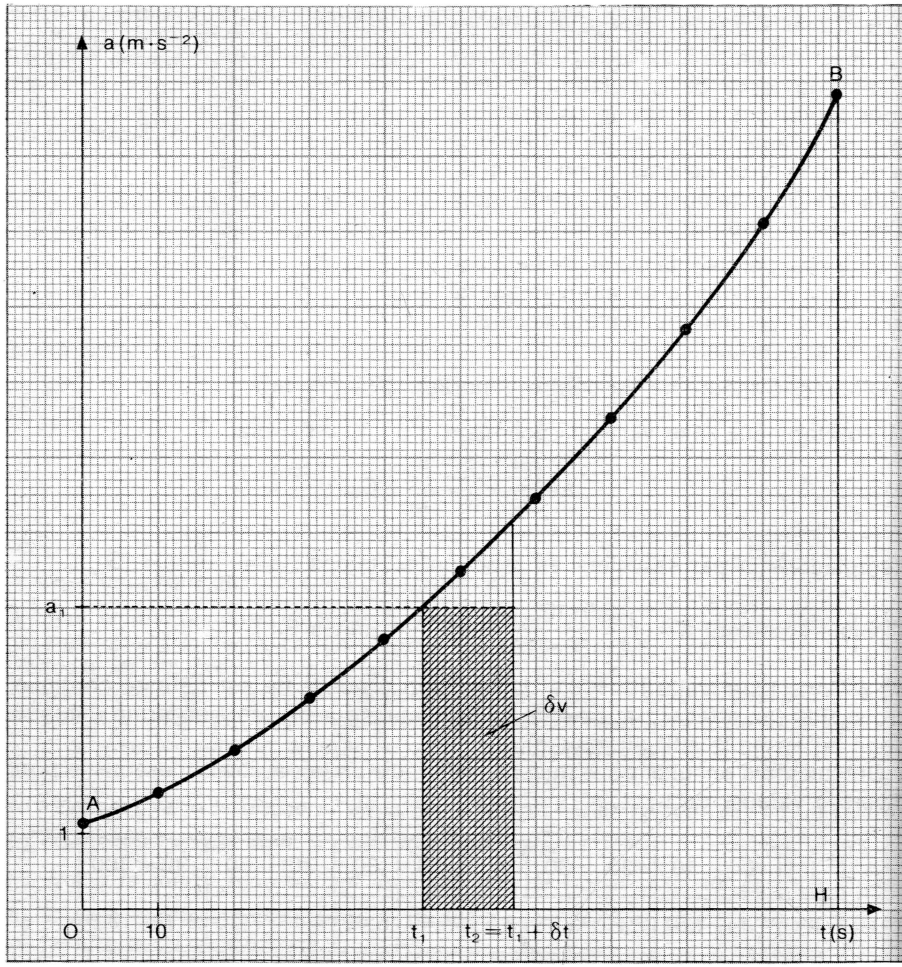
• L'augmentation de vitesse δv est représentée par l'aire du rectangle hachuré.

• Entre $t = 0$ et $t = 100$ s, il faut ajouter tous les δv pour déterminer la vitesse finale : cette dernière est représentée par l'aire de la partie de graphique limitée par OA, OH, HB et la courbe AB.

Grossièrement (en comptant d'abord les carreaux de 1 cm × 1 cm complets, puis les quarts de carreaux, ...) l'aire $S \simeq 50$ cm^2.

D'après les échelles, 1 cm^2 représente 10 s × 1 m·s^{-2} = 10 m·s^{-1}; par suite la vitesse acquise $v \simeq 500$ m·s^{-1}.

• *Remarque* (à ne lire que lorsque vous aurez traité en mathématiques les intégrations).



Nous savons que $a = \frac{dv}{dt}$, donc $dv = a\,dt$.

Par suite $v_{100} = \int_0^{100} dv = \int_0^{100} a\,dt = \int_0^{100} \frac{3{,}5 \cdot 10^4\,dt}{3{,}2 \cdot 10^3 - 15\,t} - \int_0^{100} 9{,}8\,dt$.

La deuxième intégrale I_2 se calcule facilement :

$$I_2 = \int_0^{100} 9{,}8\,dt = 9{,}8 \int_0^{100} dt = 9{,}8\,[t]_0^{100} = 980.$$

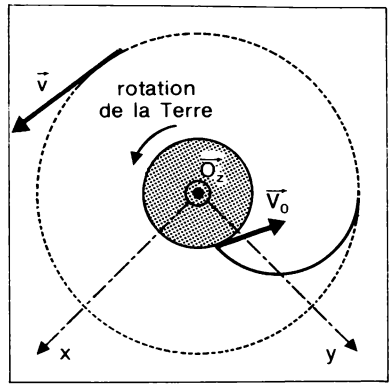
La première intégrale I_1 peut s'écrire $I_1 = \frac{3{,}5 \cdot 10^4}{-15} \int_0^{100} \frac{-15\,dt}{3{,}2 \cdot 10^3 - 15\,t}$.

On reconnaît la dérivée $\frac{u'}{u}$ de $\ln u = \ln(3{,}2 \cdot 10^3 - 15\,t)$.

D'où $I_1 = \frac{3{,}5 \cdot 10^4}{-15} [\ln(3{,}2 \cdot 10^3 - 15\,t)]_0^{100} = \frac{3{,}5 \cdot 10^4}{-15} (7{,}438 - 8{,}071) = 1477$.

En résumé $v_{100} = I_1 - I_2 = 1477 - 980 = 497\ m \cdot s^{-1}$.

b) • Sur la figure ci-contre : l'axe Oz pointant vers l'Étoile polaire vient vers nous, la Terre est représentée suivant une coupe passant par l'Équateur.
La trajectoire simplifiée correspondant au lancement est représentée en trait plein.



α) • Lorsque la fusée est immobile par rapport à la Terre, elle possède dans le repère géocentrique un vecteur vitesse $\vec{V_0}$, tangent à la Terre, dirigé dans le sens de rotation terrestre (vers l'Est), de module $V_0 = R\omega_T$, en désignant par ω_T la vitesse angulaire de la Terre.
Numériquement :

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86\,140} = 7{,}294 \cdot 10^{-5}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$V_0 = 6{,}38 \cdot 10^6 \times 7{,}294 \cdot 10^{-5} = 465\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$V_0 = 6{,}38 \cdot 10^6 \times 7{,}294 \cdot 10^{-5} = 465\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

• Les satellites sont lancés dans le sens de rotation de la Terre (leur trajectoire par rapport à la Terre s'incurve vers l'Est) pour bénéficier de cette vitesse initiale.

• La vitesse $V_0 = (\text{distance à l'axe Oz}) \times \omega_T$: pour que V_0 soit maximal, on a intérêt à augmenter cette distance, donc à se rapprocher de l'Équateur où elle devient égale au rayon de la Terre, alors $V_0 = 465\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
(Lorsque la base de lancement est proche de l'Équateur, cela facilite aussi le guidage de la fusée lors de la mise en orbite d'un satellite géostationnaire.)

β) • Système considéré : le satellite.

• Repère géocentrique considéré comme galiléen.

• La seule force qui s'exerce sur le satellite placé sur orbite (donc moteur coupé) est la force de gravitation, centripète comme le vecteur unitaire normal $\vec{N}$, $\vec{F} = \frac{\varepsilon m M}{r^2}\vec{N}$.

L'énoncé ne donne ni la constante de gravitation ε, ni la masse M de la Terre; mais il donne le champ de gravitation à l'altitude zéro. Comme $G = \frac{F}{m} = \frac{\varepsilon M}{r^2}$, à l'altitude zéro $G_0 = \frac{\varepsilon M}{R^2}$, d'où $\varepsilon M = G_0 R^2$.

Par suite $\vec{F} = m G_0 \frac{R^2}{r^2}\vec{N}$.

• En coordonnées curvilignes, dans la base $(\vec{T}, \vec{N})$, le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{r}\vec{N}. \qquad (1)$$

• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{F} = m\vec{a}$, donc $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = G_0 \frac{R^2}{r^2}\vec{N}$. (2)

• En comparant (1) et (2), on en déduit que :

— d'une part $\dot{\bar{v}} = 0$, donc $\bar{v} = C^{te}$: le mouvement est uniforme;

— d'autre part $\frac{v^2}{r} = G_0 \frac{R^2}{r^2}$ soit $v^2 = G_0 \frac{R^2}{r}$. (3)

• Nous devons évaluer v sachant que le satellite pour être géostationnaire doit avoir une vitesse angulaire égale à celle de la Terre : $v = r\omega_T$. (4)

Il suffit donc d'éliminer r entre (3) et (4). A partir de (4) : $r = \frac{v}{\omega_T}$, reportons dans (3) :

$$v^2 = \frac{G_0 R^2}{\frac{v}{\omega_T}} = \frac{G_0 R^2 \omega_T}{v}.$$

Finalement $v^3 = G_0 R^2 \omega_T$ et $v = \sqrt[3]{G_0 R^2 \omega_T}$.

• Application numérique $v = \sqrt[3]{9{,}8 \times (6{,}38 \cdot 10^6)^2 \times 7{,}294 \cdot 10^{-5}} = 3\,075 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

• Le rayon de la trajectoire $r = \frac{v}{\omega_T} = \frac{3\,075}{7{,}294 \cdot 10^{-5}} = 4{,}22 \cdot 10^7$ m.

Le satellite géostationnaire est donc à l'altitude :

$$z = r - R = 3{,}58 \cdot 10^7 \text{ m} = 35\,800 \text{ km}.$$

E 42. *(Satellites équatoriaux.)*
La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon $R = 6\,380$ km *animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de la ligne des pôles. On supposera que le repère géocentrique, dont l'origine coïncide avec le centre de la terre et dont les axes ont une direction fixe par rapport aux étoiles est galiléen. A la surface de la Terre l'intensité du champ de gravitation est* $G_0 = 9{,}8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

a) *Un satellite, assimilé à un point matériel, décrit d'un mouvement uniforme une orbite circulaire à l'altitude* $h = 400$ km. *L'orbite est dans le plan de l'Équateur.*

α) *Déterminer la vitesse* v *du satellite dans le repère géocentrique.*

β) *Déterminer la période* T *et la vitesse angulaire* ω_0 *du satellite, toujours dans le même repère.*

γ) *Le satellite se déplace vers l'est. Déterminer l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point donné de l'équateur (la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans le repère géocentrique est* $\omega_T = 7{,}29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, *et on rappelle que, dans ce repère, la vitesse d'un point de l'équateur est dirigée vers l'est).*

b) *Un satellite géostationnaire reste en permanence à la verticale d'un même point du globe. Son orbite est dans le plan de l'équateur.*

α) *Quelle est la vitesse angulaire de ce satellite dans le repère géocentrique?*

β) *Calculer le rayon de son orbite.*

(D'après bac)

S 42. (Nous ne détaillerons que la question *a*) γ), les autres questions doivent maintenant pouvoir être résolues sans difficulté.)

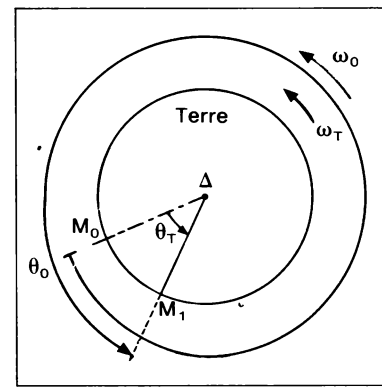
a) α) $v = R\sqrt{\dfrac{G_0}{(R+h)}}$ (revoir éventuellement **S** *b*) β));

$v = 7\,670 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 7{,}67 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

β) $T = \dfrac{2\pi(R+h)}{v} = \dfrac{2\pi}{R}\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{G_0}} = 5\,554 \text{ s} = 1 \text{ h } 32 \text{ min } 34 \text{ s}$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ ou $\omega_0 = \dfrac{v}{R+h} = 1{,}13 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

γ) — Première méthode :



Le satellite et la Terre tournent autour du même axe (l'axe pôle Sud-pôle Nord noté Δ sur la figure), dans le même sens : la vitesse angulaire de rotation du satellite par rapport à la Terre est $\omega_0 - \omega_T$. La période du satellite par rapport à la Terre est $T/\text{terre} = \dfrac{2\pi}{\omega_0 - \omega_T} = 5\,944$ s.

— Deuxième méthode :

Appelons T/terre l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point donné de l'Équateur (en d'autres termes, la période du satellite par rapport à la Terre). Pendant la durée T/terre, la Terre tourne dans le sens direct de $\theta_T = \omega_T\, T/\text{terre}$. Pendant le même temps, le satellite tourne de $\theta_0 = \omega_0\, T/\text{terre}$. Comme $\theta_0 = \theta_T + 2\pi$, on en déduit $\omega_0\, T/\text{terre} = \omega_T\, T/\text{terre} + 2\pi$, d'où :

$$T/\text{terre} = \frac{2\pi}{\omega_0 - \omega_T} = 5\,944 \text{ s} = 1 \text{ h } 39 \text{ min } 4 \text{ s}.$$

b) α) $\omega_0 = \omega_T = 7{,}29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

β) D'après *a*) α) : $v^2 = \dfrac{R^2 G_0}{R+h} = \omega_T^2 (R+h)^2$,

d'où $$(R+h)^3 = \frac{R^2 G_0}{\omega_T^2}$$

et $$(R+h) = \sqrt[3]{\frac{R^2 G_0}{\omega_T^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7 \text{ m} = 42\,200 \text{ km}.$$

E 43. *(Énergie mécanique d'un satellite dans le champ de gravitation, considérations énergétiques.)*

L'énergie potentielle de gravitation du système (satellite-Terre) a pour expression :

$$E_p = -\frac{mG_0R^2}{R+h}$$

(m : *masse du satellite;* R : *rayon de la Terre supposée à distribution sphérique de masse;* G_0 : *champ de gravitation à la surface de la Terre;* h : *altitude du satellite).*

a) *Dans un repère géocentrique, le satellite, quasi ponctuel, décrit un cercle à l'altitude* h.

α) *Exprimer sa vitesse* v *en fonction de* G_0, R *et* h.

β) *Que peut-on dire alors de l'énergie mécanique du système satellite-Terre (ou du satellite dans le champ de gravitation)? L'évaluer en fonction de* m, G_0, R *et* h.
Application numérique : $G = 9{,}8\ N \cdot kg^{-1}$; $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m; $h = 6 \cdot 10^5$ m; $m = 3 \cdot 10^3$ kg.

γ) *Le satellite passe de l'orbite circulaire d'altitude* h *à une autre orbite circulaire d'orbite* $h' > h$. *Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système? En déduire le travail* W *fourni par le moteur.*
$h' = 8 \cdot 10^5$ m.

b) Évaluation de l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite.

α) *Quelle est l'énergie mécanique du système satellite-Terre lorsque le satellite est immobile sur le sol terrestre en un point* R *de l'Équateur? On désigne par* ω_T *la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans le repère géocentrique.* $\omega_T = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ rad \cdot s^{-1}$.

β) *Quelle énergie faut-il donner au satellite pour le mettre en orbite circulaire à l'altitude* h.

S 43. *a*) α) Réponse : $v^2 = \dfrac{G_0 R^2}{R+h}$ (revoir éventuellement **S 41** *b*) β)).

β) • Le moteur du satellite ne fonctionne pas, les frottements dus à l'air sont négligeables à cette altitude : le système ne reçoit donc aucun travail extérieur, son énergie mécanique est constante. (Remarquons que ceci est évident : le mouvement est uniforme donc E_c est constant, l'altitude h reste constante donc E_p est constant.)

• Théoriquement le système (satellite-Terre) a une énergie cinétique totale égale à celle du satellite et à celle de la Terre qui tourne sur elle-même dans le repère géocentrique. Comme l'énergie cinétique de rotation de la Terre reste constante et que seules les variations d'énergie nous intéressent, nous n'en tiendrons pas compte. Par suite l'énergie cinétique intéressante est celle du satellite $E_c = \dfrac{1}{2} mv^2$ (cette expression convient car le satellite est quasi ponctuel).

• L'énergie potentielle de gravitation est donnée par l'énoncé : $E_p = \dfrac{-mG_0R^2}{R+h}$.

• Par suite l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2} mv^2 - \frac{mG_0R^2}{R+h} \\ &= \frac{mG_0R^2}{2(R+h)} - \frac{mG_0R^2}{R+h} \qquad \text{(d'après } \alpha\text{)} \\ &= \frac{-mG_0R^2}{2(R+h)}. \qquad (1) \end{aligned}$$

• Application numérique : $E = -8{,}6 \cdot 10^{10}$ J.

γ) • Remarquons d'abord qu'une fois stabilisé sur son orbite circulaire à l'altitude h', l'expression (1) précédente permet d'évaluer l'énergie mécanique nouvelle E' du satellite :

$$E' = \frac{-mG_0R^2}{2(R+h')}.$$

Comme $h' > h$, $|E'| < |E|$, mais E' et E étant des nombres négatifs il s'ensuit que $E' > E$: l'énergie mécanique a augmenté.

• Le travail W fourni par le moteur est égal à la variation d'énergie mécanique du système :

$$W = E' - E = \frac{mG_0R^2}{2}\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R+h'}\right) = 2{,}39 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

b) α) • Présentation de la démarche : l'expression (1) ne convient pas pour évaluer E car sur le sol, en R, le satellite n'est pas en orbite circulaire (condition nécessaire pour que la formule convienne) : il faut donc évaluer directement E_c et E_p, donc E, en R.

• Le satellite a la même vitesse que le point R de l'Équateur avec lequel il coïncide : par rapport au repère géocentrique $v_R = R\omega_T$,
d'où $E_c = \frac{1}{2} mv_R^2 = \frac{1}{2} mR^2\omega_T^2$.

• L'énergie potentielle lorsque le satellite est sur le sol s'obtient en faisant $h = 0$ dans la formule donnée par l'énoncé :

$$E_p = \frac{-mG_0R^2}{R} = -mG_0R.$$

• Par suite l'énergie mécanique du système lorsque le satellite est en R est :

$$E_R = \frac{1}{2} mR^2\omega_T^2 - mG_0R.$$

β) Pour placer le satellite en orbite il faut lui donner l'énergie :

$$W = E - E_R = -\frac{mG_0R^2}{2(R+h)} - \frac{1}{2} mR^2\omega_T^2 + mG_0R = 1{,}02 \cdot 10^{11} \text{ J}.$$

E 44. *(Vitesse de libération.)*
Un objet de très petites dimensions, de masse m, *repose sur le sol terrestre. A quelle vitesse minimale* v_0, *mesurée dans un repère géocentrique, faut-il lancer l'objet pour qu'il s'éloigne indéfiniment de la Terre :* v_0 *est appelée vitesse de libération de la Terre.*
Données :

— *l'énergie potentielle de gravitation du système objet-Terre est* $E_p = -\frac{KmM}{R+z}$;
— *l'intensité du champ de gravitation à l'altitude zéro est* $G_0 = 9{,}8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$;
— *on néglige l'action de l'air, des autres planètes, du Soleil;*
— *le rayon de la Terre est* $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m;
— *la Terre a une répartition sphérique de masse.*

S 44. • Présentation de la démarche : l'objet n'a pas de moteur, une fois sorti du lanceur terrestre qui lui a communiqué la vitesse $\vec{v_0}$ l'objet n'est plus soumis qu'à la force de gravitation terrestre; si on néglige l'action de l'air, des autres planètes, du Soleil, le système (objet-Terre) ne reçoit aucun travail de force extérieure, son énergie mécanique se conserve; il suffira d'évaluer cette énergie mécanique au départ et à l'infini que « devra être atteint » à vitesse nulle puisque v_0 est la vitesse minimale nécessaire à la libération.

• Lorsque l'objet est à l'altitude zéro, la force de gravitation donnée par la loi de Newton est $F_0 = mG_0 = \frac{KmM}{R^2}$, d'où $KM = G_0R^2$. Par suite l'énergie potentielle du système objet-Terre a aussi pour expression $E_p = \frac{-mG_0R^2}{R+z}$.

• État initial : l'objet part de la Terre à vitesse v_0.

L'énergie cinétique de l'objet ponctuel $E_{c_0} = \frac{1}{2}mv_0^2$, l'énergie potentielle est $E_{p_0} = \frac{-mG_0R^2}{R} = -mG_0R$, l'énergie mécanique est :

$$E_0 = E_{c_0} + E_{p_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mG_0R.$$

• État final : l'objet est à l'infini (z est infiniment grand) à vitesse nulle.
L'énergie cinétique $E_{c_\infty} = 0$, l'énergie potentielle $E_{p_\infty} = 0$, l'énergie mécanique $E_\infty = 0$.

• Comme l'énergie mécanique se conserve $E_0 = E_\infty$, d'où $\frac{1}{2}mv_0^2 - mG_0R = 0$.

Par suite $v_0^2 = 2G_0R$ et $v_0 = \sqrt{2G_0R} = 11200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 11{,}2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

· *Remarque.* Nous savons que l'énergie potentielle est définie à une constante près, en général on choisit un état du système dit « état de référence » pour lequel on convient que $E_p = 0$. D'après le calcul précédent, on constate que l'état de référence pris par l'énoncé pour définir E_p est : « l'objet à distance infinie de la Terre ». Avec cet état de référence E_p est négatif, sa valeur maximale est zéro.

E 45. *(A ne faire que lorsque vous aurez étudié les intégrales en mathématiques, ne cependant pas négliger ce problème inspiré d'un problème de bac.)*
La Terre est supposée sphérique, à répartition sphérique de masse. Un objet de masse m *se déplace autour de la Terre. On le repère par la distance* r *au centre de la Terre. Son mouvement est défini par rapport à un repère géocentrique. Cet objet n'est soumis qu'à la force de gravitation de la Terre.* $F = \frac{\varepsilon mM}{r^2}$ (ε : *constante de gravitation universelle;* M *masse de la Terre*).

a) *Déterminer le travail élémentaire de la force de gravitation* $\vec{F}$ *s'exerçant sur l'objet lorsque celui-ci se déplace radialement d'une distance* dr (dr *est assez petit pour que la force soit considérée comme constante*).
En déduire le travail de $\vec{F}$ *lorsque le satellite passe de* A_1 (*distance* r_1) *à* A_2 (*distance* r_2).

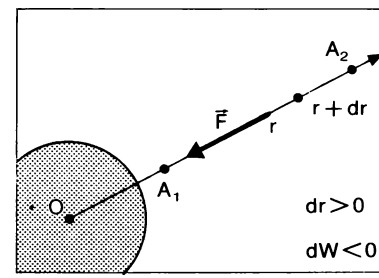
b) *Lorsque l'objet passe par* A_1 *son énergie cinétique est* E_{c_1}, *l'énergie potentielle de gravitation de l'objet dans le champ de gravitation est* E_{p_1}. *Lorsque l'objet passe par* A_2, *son énergie cinétique est* E_{c_2}, *l'énergie potentielle est alors* E_{p_2}.

α) *Que peut-on dire de* $E_{c_1}+E_{p_1}$ *et* $E_{c_2}+E_{p_2}$?

β) *Évaluer* $E_{c_2}-E_{c_1}$.

γ) *En déduire* $E_{p_1}-E_{p_2}$ *puis l'expression de* E_{p_1} *sachant que l'on prend* $E_{p_2}=0$ *lorsque* r_2 *est infiniment grand.*

S 45. *a*) • Supposons que l'objet se déplace sur l'axe Or, passant de r à r + dr. Comme dr est très petit, la force de gravitation $\vec{F}$ garde pratiquement le module $F=\dfrac{\varepsilon mM}{r^2}$ (expression donnée par la loi de Newton), par suite le travail élémentaire en valeur absolue est $|dW|=F\,|dr|$.
Lorsque $dr>0$, $dW<0$ (cas de figure); lorsque $dr<0$, $dW>0$.



Par suite algébriquement $dW=-F\,dr=-\dfrac{\varepsilon mM}{r^2}\,dr$.

• Le travail de $\vec{F}$ lorsque l'objet passe de A_1 à A_2 est :

$$W=\int_{r_1}^{r_2} dW=\int_{r_1}^{r_2}\frac{-\varepsilon mM}{r^2}\,dr=\varepsilon mM\int_{r_1}^{r_2}\frac{-dr}{r^2}.$$

On reconnaît en $\dfrac{-1}{r^2}$ la dérivée de $\dfrac{1}{r}$ par rapport à r. Par suite :

$$W=\varepsilon mM\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}=\varepsilon mM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

b) α) L'objet n'est soumis à aucune force autre que la force de gravitation prise en compte dans l'énergie potentielle de gravitation : l'énergie mécanique de l'objet dans le champ de gravitation (ou du système Terre-objet) se conserve. Par suite $E_{c_1}+E_{p_1}=E_{c_2}+E_{p_2}$. (1)

β) Pour évaluer $E_{c_2}-E_{c_1}$ on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'objet entre A_1 et A_2, dans le repère géocentrique galiléen :

$$E_{c_2}-E_{c_1}=W=\varepsilon mM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

γ) D'après (1), $E_{p_1}-E_{p_2}=E_{c_2}-E_{c_1}=\varepsilon mM\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right)$.

Lorsque r_2 est infiniment grand $\dfrac{1}{r_2}=0$, par convention alors $E_{p_2}=0$, par suite $E_{p_1}=\dfrac{-\varepsilon mM}{r_1}$: c'est l'expression de l'énergie potentielle de gravitation à la distance r_1 du centre de la Terre.

Note : cette expression peut aussi s'écrire, comme nous l'avons vu dans les exercices précédents, $E_p = \frac{-\varepsilon mM}{R+h}$ ou $E_p = \frac{-mG_0R^2}{R+h}$.

E 46. *(Le poids d'un objet.)*
Dans un repère terrestre, il est plus intéressant de caractériser l'action de la Terre sur un objet par le poids $\vec{P}$ *de cet objet plutôt que par la force de gravitation* $\vec{F}$. *Nous allons montrer que pour des points au voisinage de la Terre, la différence est faible entre* $\vec{P}$ *et* $\vec{F}$, *pour cela nous allons étudier successivement dans un repère terrestre et dans un repère géocentrique la situation physique suivante : un objet ponctuel repose en un point* M *du sol terrestre, il est uniquement soumis à l'action de la Terre et à l'action* $\vec{S}$ *du sol.*

a) Dans un repère terrestre.
Comment appelle-t-on la force de l'action de la Terre?
Quelle est la relation entre cette force et $\vec{S}$?

b) Dans un repère géocentrique *supposé parfaitement galiléen.*

α) *Comment appelle-t-on la force de l'action de la Terre?*

β) *Quelle est l'accélération* $\vec{a}$ *de l'objet. En particulier préciser le module de* $\vec{a}$ *en fonction de la latitude* λ *du lieu, de la vitesse angulaire* ω_T *de rotation de la Terre et du rayon terrestre* R.

γ) *Quelle est la relation entre la force du* b) α), $\vec{S}$, m *et* $\vec{a}$?

c) *En déduire la relation entre* $\vec{F}$, $\vec{P}$, m *et* $\vec{a}$.

d) *Dans le repère terrestre, non parfaitement galiléen, quelle est la relation rigoureuse traduisant l'équilibre de l'objet :* $\vec{P}+\vec{S}=\vec{0}$ *ou* $\vec{F}+\vec{S}=\vec{0}$. *Conclure.*

e) *En quels points du sol terrestre* $\vec{F}=\vec{P}$?
En quels points du sol terrestre la différence entre $\vec{F}$ *et* $\vec{P}$ *est-elle maximale?*
Évaluer pour ces points le rapport $\frac{F-P}{F}$ *sachant que* $G_0 = 9{,}8\ N\cdot kg^{-1}$. *Conclure.*

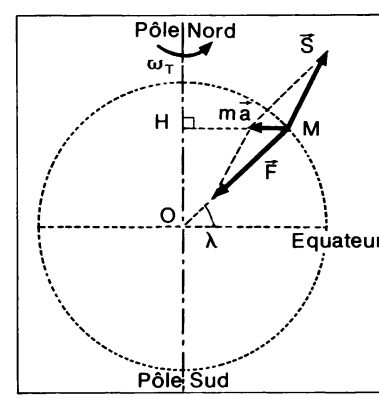
S 46. *a) Dans un repère terrestre.*
• L'action de la Terre sur un objet est appelée le poids $\vec{P}$ de cet objet. (Le poids $\vec{P}$ a la direction du fil à plomb, il est vertical.)

• L'objet est en équilibre, par rapport à la Terre, sous l'action de son poids $\vec{P}$ et de l'action du sol S, par suite $\vec{P}+\vec{S}=\vec{0}$. (1)

b) Dans un repère géocentrique.

α) L'action de la Terre sur l'objet est rigoureusement la force de gravitation $\vec{F}$. Cette force, si on suppose la Terre à répartition sphérique de masse, a un support qui passe par le centre de la Terre.

β) Par rapport à la droite des pôles, fixe dans le repère géocentrique, le point M décrit un cercle de centre H, de rayon HM, dont le plan est parallèle au plan de l'Équateur, à la vitesse angulaire constante ω_T.



Par suite le vecteur accélération de M, donc de l'objet ponctuel placé en M, est axipète (c'est-à-dire dirigé vers l'axe de rotation), de module constant $a = H.M\omega_T^2$.
Si on appelle λ, la latitude de M, c'est-à-dire l'angle de OM avec le plan de l'Équateur, $HM = R \cos \lambda$. Par suite :

$$a = R(\cos \lambda)\, \omega_T^2.$$

γ) Considérons l'objet dans le repère géocentrique galiléen (voir figure).
Il est soumis à la force de gravitation $\vec{F}$, à l'action du sol $\vec{S}$.
D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F} + \vec{S} = m\vec{a}. \qquad (2)$$

c) D'après la relation (1) $\vec{S} = -\vec{P}$, reportons dans (2) :

$$\vec{F} - \vec{P} = m\vec{a}, \quad \text{d'où} \quad \vec{P} = \vec{F} - m\vec{a}.$$

Ainsi le poids est égal à la force de gravitation $\vec{F}$ corrigée du vecteur axifuge $-m\vec{a}$.
(Sur la figure $\vec{P}$ n'est pas représenté, il serait opposé à $\vec{S}$, nous l'avons représenté dans $\mathcal{M}$ 22.)

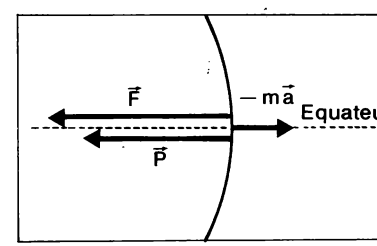
d) La relation (2) $\vec{F} + \vec{S} = m\vec{a}$ est rigoureuse puisqu'on admet que le repère géocentrique est parfaitement galiléen. Par suite :
— la relation $\vec{F} + \vec{S} = \vec{0}$ n'est pas rigoureuse puisqu'on néglige $m\vec{a}$;
— la relation $\vec{P} + \vec{S} = \vec{0}$ est rigoureuse puisque, en remplaçant $\vec{P}$ par $\vec{F} - m\vec{a}$, c'est la relation (2) écrite différemment.
On voit l'avantage d'utiliser le poids $\vec{P}$ d'un objet (plutôt que $\vec{F}$) dans un repère terrestre : on peut ainsi écrire des conditions d'équilibre rigoureuses bien que le repère terrestre ne soit pas parfaitement galiléen.

e) • Le poids $\vec{P}$ est rigoureusement égal à la force de gravitation lorsque le vecteur $-m\vec{a} = \vec{0}$: le point M doit alors être au pôle nord ou au pôle sud de la Terre.

• Au contraire en tous les points de l'Équateur le module de $\vec{a}$ est maximal, il vaut $a = R\omega_T^2$.

• La relation vectorielle $\vec{P} = \vec{F} - m\vec{a}$ se traduit alors, en norme, par $P = F - ma = F - mR\omega_T^2$.
L'écart relatif $\dfrac{F-P}{F} = \dfrac{mR\omega_T^2}{mG_0} = \dfrac{R\omega_T^2}{G_0}$.
Numériquement :

$$\frac{F-P}{P} = \frac{6{,}4 \cdot 10^6}{9{,}8} \times \left(\frac{2\pi}{86\,140}\right)^2 = 3{,}5 \cdot 10^{-3}.$$



• Conclusion : tant qu'un objet reste au voisinage de la Terre, il y a très peu de différence entre le poids de cet objet $\vec{P}$ et la force de gravitation $\vec{F}$. On peut dire donc que $\vec{P} = m\vec{g} \simeq \vec{F} = m\vec{G}$, donc que l'intensité du champ de pesanteur $\vec{g}$ est voisine de l'intensité du champ de gravitation $\vec{G}$.

• Remarque : pour la raison précédente, dans certains problèmes, au lieu de vous donner G_0, on vous donne g_0.

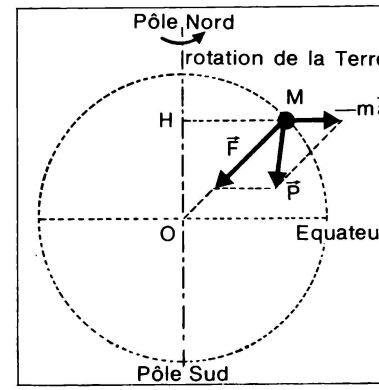
22 **Le poids d'un objet.**

• Dégageons les propriétés vues dans l'exercice précédent.

• Soit un objet de masse m, situé en un point de la Terre où le vecteur accélération est $\vec{a}$ par rapport à un repère géocentrique. Soit $\vec{F}$ la force de gravitation s'exerçant sur l'objet.

Par définition le poids de l'objet est :

$$\vec{P} = \vec{F} - m\vec{a}.$$



• Le poids apparaît ainsi comme une force hybride, somme :

— d'une force d'action $\vec{F}$ due à la Terre;

— d'un vecteur correctif, axifuge, $-m\vec{a}$, qui tient compte que la Terre tourne autour de l'axe des pôles.

• Dans un repère terrestre, il est plus intéressant de raisonner avec $\vec{P}$ plutôt qu'avec $\vec{F}$. En effet la condition d'équilibre d'un objet $\Sigma \overrightarrow{\text{forces}} = \vec{0}$ devient rigoureuse si on utilise $\vec{P}$. En d'autres termes, utiliser $\vec{P}$ à la place de $\vec{F}$ c'est, pour les équilibres, rendre le repère terrestre d'aussi bonne « qualité galiléenne » que le repère géocentrique.

• Que ces distinctions, assez subtiles, entre $\vec{F}$ et $\vec{P}$, ne vous fasse pas oublier que **si un objet reste au voisinage immédiat de la Terre,** la différence entre $\vec{F}$ et $\vec{P}$ est négligeable : **on peut alors confondre pratiquement le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ et le vecteur champ de gravitation $\vec{G}$.**

E 47. *Un solide de masse* m *est à l'altitude* z *au-dessus de la surface terrestre supposée sphérique de rayon* R. *L'énergie potentielle de gravitation du système (solide, Terre) est* $E_p = \dfrac{-mG_0R^2}{R+z} + C^{te}$.

On appelle « état de référence » un état du système où l'énergie potentielle de gravitation est prise conventionnellement égale à zéro.

a) *L'état de référence est : « le solide à distance infinie de la Terre », quelle est la valeur de la constante?*

b) *L'état de référence est : « le solide à la surface de la Terre c'est-à-dire à l'altitude zéro ».*

α) *Quelle est alors la valeur de la constante?*

β) *Modifier la formule donnant* E_p *en fonction de* z *lorsque* z *reste très faible devant* R. *Quels noms peut-on alors donner à* E_p?

S 47. *a*) Lorsque z tend vers l'infini, $\frac{-mG_0R^2}{R+z}$ tend vers zéro. D'après la convention alors $E_p = C^{te} = 0$, donc la constante doit être prise égale à zéro.

b) α) • Lorsque $z = 0$, d'après le choix de l'état de référence :

$$E_p = \frac{-mG_0R^2}{R} + C^{te} = 0,$$

d'où $$C^{te} = mG_0R.$$

L'énergie potentielle de gravitation a alors pour expression :

$$E_p = \frac{-mG_0R^2}{R+z} + mG_0R,$$

soit $$E_p = mG_0R\left(1 - \frac{R}{R+z}\right) = \frac{mG_0Rz}{R+z}. \qquad (1)$$

• Lorsque z devient petit devant R, cela signifie que le rapport $\frac{z}{R}$ est alors très petit devant 1. Faisons apparaître ce rapport $\frac{z}{R}$, dans l'expression (1), en divisant numérateur et dénominateur par R : alors $E_p = \frac{mG_0z}{1+\frac{z}{R}} \simeq mG_0z$, (puisque $\frac{z}{R}$ est négligeable devant 1).

• Comme z est faible, le solide reste au voisinage immédiat de la Terre, on peut alors confondre avec une bonne précision force de gravitation et poids : E_p peut être considérée comme l'énergie potentielle de gravitation ou l'énergie potentielle de pesanteur.
On peut aussi assimiler G_0 et g (intensité du champ de pesanteur au niveau du sol), alors E_p prend l'expression connue $E_p = mgz$ que nous rappellerons dans ℳ 23.

E 48. *(Impesanteur dans un satellite ou dans tout véhicule en chute libre.)*
Un pèse-personne mesure le module de la force $\vec{R}$ qu'il exerce sur l'objet qui repose sur lui, on peut le graduer en newtons.

a) *Le pèse-personne est installé dans un satellite décrivant, dans un repère géocentrique, une orbite circulaire autour de la Terre à l'altitude z. Le vecteur champ de gravitation* $\vec{G} = g\frac{R^2}{(R+z)^2}\vec{N}$ (g : *intensité du champ de pesanteur au niveau du sol,* $\vec{N}$: *vecteur unitaire, normal à la trajectoire, dirigé vers le centre de la Terre*).

α) *Quelle est l'expression du vecteur accélération* $\vec{a}_G$ *du centre d'inertie* G *du satellite dans le repère géocentrique?*

β) *Un astronaute monte sur le pèse-personne. Qu'indique le pèse-personne?* (*On admettra que les vecteurs accélération en tous les points du satellite sont égaux à* $\vec{a}_G$.)

b) *Le pèse-personne est installé dans un avion qui décrit pendant quelques minutes une parabole d'axe vertical, de façon que l'accélération de l'avion soit pratiquement égale à* $\vec{g}$.
Un aviateur monte sur le pèse-personne. Qu'indique alors le pèse-personne?

c) *Le pèse-personne, chargé d'une masse* $m = 10$ kg, *est installé dans une fusée qui est en mouvement d'ascension verticale, accélérée par rapport à la Terre. Qu'indique le pèse-personne gradué en newtons lorsque l'accélération de la fusée par rapport au sol est* $a = 12\ m \cdot s^{-2}$. *On admettra que la fusée évolue dans un champ de pesanteur uniforme* $\vec{g}$ *de module* $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

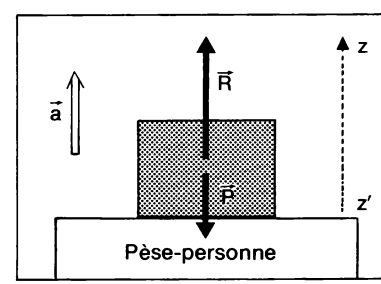
S 48. *a*) α) Considérons le système satellite, de masse M, dans un repère géocentrique. Ce satellite, moteur coupé, en orbite stationnaire, n'est soumis qu'à la force de gravitation $\vec{F} = M\vec{G}$ due à la Terre.
D'après le théorème du centre d'inertie : $\vec{F} = M\vec{a_G}$, par suite :

$$\vec{a_G} = \vec{G} = g\frac{R^2}{(R+z)^2}\vec{N}.$$

β) • Considérons le système « astronaute » assimilé à un solide.
• Le repère est un repère géocentrique galiléen.
• Le vecteur accélération du centre d'inertie de l'astronaute est très voisin de $\vec{a_G}$ (vecteur accélération du centre d'inertie du satellite), il est donc pratiquement égal au vecteur champ de gravitation $\vec{G}$ à l'endroit où se trouve le satellite.
• L'astronaute est soumis à l'action du pèse-personne $\vec{R}$ et à la force de gravitation $\vec{f} = m\vec{G}$.
• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{f} + \vec{R} = m\vec{a_G} = m\vec{G}$.
• Comme $\vec{f} = m\vec{G}$, il s'ensuit que $\vec{R} = \vec{0}$. Le pèse-personne indique zéro newton : l'astronaute à un poids apparent nul par rapport au pèse-personne, on dit que l'astronaute (ou tout objet situé dans le satellite) est en impesanteur.

b) • Considérons le système « aviateur » assimilé à un solide.
• Le repère est le repère terrestre.
• L'aviateur est immobile dans l'avion, il a donc la même accélération que ce dernier, c'est-à-dire $\vec{g}$.
• L'aviateur est soumis à deux forces : l'action du pèse-personne $\vec{R}$, son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.
• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{g}$, d'où $\vec{R} = \vec{0}$. L'aviateur a un poids apparent nul, il est en impesanteur (tant que l'avion a une accélération égale à $\vec{g}$).

c) • Considérons le système : objet de masse $m = 10$ kg.
• Le repère est lié à la Terre.
• L'objet, immobile par rapport à la fusée en translation verticale, a le même vecteur accélération $\vec{a}$ que celle-ci.
• L'objet est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à l'action du pèse-personne $\vec{R}$.
• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$.



• Sur zz', $-P + R = ma$, d'où $R = m(g + a) = 218$ N.
• Remarque : le poids apparent de l'objet dans la fusée est $\vec{P_a} = -\vec{R} = \vec{P} - m\vec{a}$, au poids $\vec{P}$ il faut ajouter le vecteur correctif $-m\vec{a}$ dû au fait que la fusée a l'accélération $\vec{a}$. Ce poids apparent est $\frac{P_a}{P} = \frac{218}{98} = 2{,}2$ fois le poids de l'objet.

• *Que signifie « vol balistique »?*

C'est un vol comparable à celui d'une balle, objet inerte sans moteur. Ainsi dire qu'un satellite est en vol balistique signifie que ses moteurs ne fonctionnent pas. Pour changer d'orbite, les moteurs du satellite doivent fonctionner : pendant ce transfert de trajectoire le satellite n'est plus en vol balistique.
Il faut être conscient que le phénomène d'impesanteur n'existe, dans un satellite, que si le vol est balistique.

• *Est-ce que l'énergie potentielle d'un système dépend du repère d'espace utilisé?*

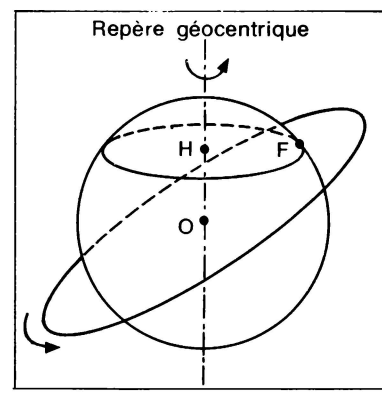
Non, l'énergie potentielle d'un système ne dépend pas du repère (ou référentiel) choisi. Ainsi l'expression $E_p = \frac{-\varepsilon mM}{r}$ établie dans E 45, est valable dans un repère de Copernic, dans un repère géocentrique ou dans un repère terrestre.

• *Est-ce que tous les satellites terrestres ont des trajectoires circulaires?*

Non, certains ont des trajectoires elliptiques. Dans les problèmes, niveau classe terminale, on suppose toujours la trajectoire circulaire pour faciliter l'étude : il faut savoir alors que le cercle trajectoire, dans un repère géocentrique, a pour centre le centre de la Terre.

• *Peut-on placer un satellite géostationnaire au-dessus de la France?*

Non, nous allons le montrer.
Rappelons d'abord qu'un satellite est géostationnaire :
— si sa période est égale à la période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles (soit $T_T = 86\,140$ s);
— s'il tourne dans le même sens que la Terre;
— si le plan de sa trajectoire est le plan de l'Équateur.
Supposons qu'un satellite satisfasse les deux premières conditions et qu'il passe au-dessus d'un point F de la France :



— le point F tourne autour de l'axe des pôles, donc décrit dans le repère géocentrique un cercle de centre H;

— le satellite tourne autour du centre de la Terre O;

— le satellite reviendra donc au-dessus de F tous les temps T_T (grossièrement tous les jours), mais n'est pas stabilisé au-dessus de F : il n'est pas géostationnaire.

• *Pour caractériser l'action de la Terre sur un satellite, dans un repère géocentrique, faut-il considérer la force de gravitation ou le poids?*

En toute rigueur on ne doit parler de poids que dans un repère terrestre. Cependant lorsqu'on reste au voisinage immédiat de la Terre, force de gravitation et poids sont des forces très voisines que l'on confond souvent. Mais attention dès que l'on s'éloigne de la Terre, le poids et la force de gravitation diffèrent nettement : il est alors conseiller de ne plus utiliser le poids.

• *Pourquoi dans* $\mathcal{M}$ 22, *appelez-vous* $-m\vec{a}$ *un vecteur axifuge et non pas centrifuge?*

— Dans l'expression définissant le poids d'un objet, $\vec{F} = \vec{P} - m\vec{a}$, le vecteur $-m\vec{a}$ est dirigé (se reporter à la figure de $\mathcal{M}$ 22) suivant la direction HM, perpendiculaire à l'axe des pôles de la Terre, il n'est pas dirigé suivant OM : c'est pour insister sur ce fait que l'on dit que $\vec{a}$ est axipète et $-m\vec{a}$ est axifuge.

— Au contraire, lorsqu'on applique le théorème du centre d'inertie à un satellite, ce qui intervient c'est le vecteur $\vec{a}_G$ pointant vers O, donc centripète.

— Remarque : nous avons choisi de n'utiliser que des repères galiléens, aussi n'intervient-il pas de force d'inertie (revoir Pourquoi du chapitre 2). En utilisant un point de vue non galiléen, le vecteur $-m\vec{a}$ est appelé « force d'inertie ».

4 MOUVEMENTS DANS UN CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME

E 49. a) *D'un point* A, *on laisse tomber une bille sans lui communiquer de vitesse par rapport au sol. La bille touche le sol, en un point* S, 1,4 s *après. Calculer la distance* AS. *L'intensité du champ de pesanteur est* $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

b) *Du même point* A, *on lance la bille verticalement, vers le bas, à la vitesse* v_A *inconnue. La bille arrive en* S, 0,7 s *après. Calculer* v_A.

c) *Toujours du point* A, *on lance la bille verticalement, vers le haut, à la vitesse* $v_A = 10\ m \cdot s^{-1}$. *La bille a une masse* $m = 50$ g.

α) *A quelle hauteur maximale au-dessus de* S *la bille monte-t-elle?*

β) *Au bout de combien de temps arrive-t-elle en* S?

γ) *Quelle est l'énergie mécanique du système bille-Terre (on dit aussi de la bille dans le champ de pesanteur), l'état de référence pour l'énergie potentielle étant la bille en* S? *En déduire la vitesse d'arrivée de la bille en* S.

M 23 **Chute libre dans un espace champ de pesanteur uniforme.**

- Un objet de masse m, placé au voisinage de la Terre, est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$. Le vecteur $\vec{g}$, vertical, dirigé vers le centre de la Terre, est le vecteur champ de pesanteur.
- Dans une région de l'espace, de dimensions suffisamment faibles, les vecteurs $\vec{g}$ sont équipollents : cette zone est un espace champ de pesanteur uniforme.
- Un objet qui n'est soumis qu'à son poids est en chute libre. (Théoriquement une chute libre doit se faire dans le vide, pratiquement pour des objets denses, animés d'une vitesse assez faible, le rôle de l'air peut être négligé, c'est ce que nous ferons dans les exercices.)
- Le mouvement de chute libre dépend de la façon dont l'objet a été lancé à un instant que l'on prend souvent comme origine des dates :

① si le vecteur vitesse de lancement, c'est-à-dire le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$, est nul ou bien vertical, le mouvement de chute libre est rectiligne, vertical, uniformément varié;

② si le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ est oblique par rapport à la verticale, non nul, le mouvement de chute libre est parabolique, dans un plan vertical.

(Dans les problèmes on pourra utiliser la propriété ① sans démonstration.)

Il importe donc de préciser l'état de mouvement initial qui conditionne le mouvement de chute libre.

24 Énergie potentielle de pesanteur, énergie mécanique.

• Le système solide-Terre (ou le solide dans le champ de pesanteur terrestre) possède une énergie qui dépend de la position du solide par rapport à la Terre : c'est l'énergie potentielle de pesanteur Ep.

• Si l'objet se déplace **dans un espace champ de pesanteur uniforme** caractérisé par le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ constant, cette énergie potentielle est égale à :

$$\mathbf{Ep = mgz.}$$

(z désignant l'altitude du centre d'inertie de l'objet par rapport au niveau zéro de l'état de référence).

• Par rapport à un repère lié à la Terre, le solide possède une certaine énergie cinétique Ec.

• La somme $\mathbf{E = Ec + Ep}$

est l'énergie mécanique du système solide-Terre (ou du solide dans le champ de pesanteur) dans le repère lié à la Terre, par rapport à l'état de référence choisi pour définir Ep = 0.

• Lorsque le système solide-Terre ne reçoit pas de travail de l'extérieur (ou lorsque le solide dans le champ de pesanteur ne reçoit pas d'autre travail que celui dû à son poids), en particulier de travail dû à des frottements, son énergie mécanique reste constante.

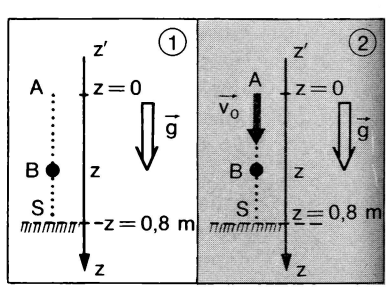
S 49. Présentation de la démarche commune aux trois questions du problème : la bille est en mouvement de chute libre dans un espace champ de pesanteur uniforme; elle part de A sans vitesse (question *a*)) ou avec un vecteur vitesse vertical vers le bas (question *b*)) ou vers le haut (question *c*)), sa trajectoire est donc rectiligne, portée par la verticale passant par A; d'après le théorème du centre d'inertie appliqué à la bille dans un repère lié au sol, $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \vec{g}$; le mouvement étant rectiligne et ayant un vecteur accélération constant est uniformément varié.

a) (Figure ①).

• Repérons la bille B sur l'axe z'z, vertical, orienté vers le bas, d'origine A, par $\overline{AB} = z$.

• Choisissons l'instant de départ de A comme origine des dates, l'état de mouvement initial est donc caractérisé par $z_0 = 0$ et par $\overline{v_0} = 0$ puisque la bille part de A sans vitesse.

• La mesure algébrique $\bar{a}$ du vecteur accélération $\vec{a} = \vec{g}$ sur z'z est $\bar{a} = g$ puisque $\vec{g}$ est dans le sens positif de l'axe.



• La loi horaire du mouvement est donc $z = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 + \overline{v_0}t + z_0 = \frac{1}{2}gt^2$.

Lorsque $t = 1{,}4$ s, la bille touche le sol : $z = \overline{AS} = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 1{,}4^2 = 9{,}60$ m.

La distance AS est donc 9,60 m.

b) (Figure ②).

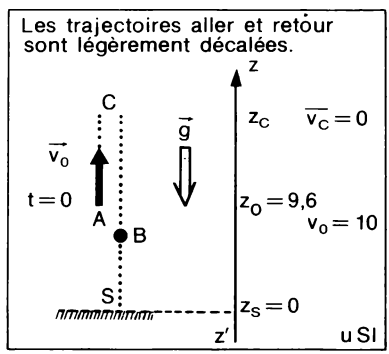
• Prenons les mêmes conventions qu'à la question *a*), cette fois-ci $\overline{v_0} = +v_A$, car la bille part de A, à $t = 0$, à la vitesse v_A, vers le bas c'est-à-dire dans le sens positif.

• La loi horaire du mouvement est $z = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 + \overline{v_0}t + z_0 = \frac{1}{2}gt^2 + v_A t$.

La bille arrive au sol, $z = \overline{AS} = 9{,}6$ m, à la date $t = 0{,}7$ s, d'où :

$$9{,}6 = 4{,}9 \times (0{,}7)^2 + v_A \times 0{,}7 \quad \text{soit} \quad v_A = 10{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) • Après avoir lu toute cette question c), nous constatons que l'origine des altitudes pour l'énergie potentielle de pesanteur est l'altitude de S il est donc conseillé pour avoir une cohérence dans toute cette question de choisir, pour repérer la bille, un axe z'z, vertical, orienté vers le haut, d'origine S. La bille B sera donc repérée par $\overline{SB} = z$.



• Choisissons l'instant de départ de A comme origine des dates, l'état de mouvement initial est donc caractérisé par $z_0 = 9{,}6$ m, $\overline{v_0} = +v_A = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (puisque le vecteur vitesse initiale est orienté dans le sens positif).

L'accélération algébrique $\bar{a} = -g$ puisque le vecteur $\vec{a} = \vec{g}$ est orienté dans le sens négatif.

<u>α)</u> • Soit C le point le plus haut atteint par la bille, la bille est alors à vitesse $v_C = 0$. Sur la figure ci-contre nous avons mis les données relatives aux états de mouvements en A et en C, l'utilisation de la relation $\overline{v_C^2} - \overline{v_0^2} = 2\bar{a}(z_C - z_0)$ s'impose pour évaluer z_C :

$$0 - 10^2 = -2 \times 9{,}8(z_C - 9{,}6) \quad \text{d'où} \quad z_C = 14{,}7 \text{ m}.$$

(On aurait pu aussi utiliser le théorème de l'énergie cinétique : système bille, repère lié au sol quasi galiléen, état initial « la bille partant de A », état final « la bille à vitesse nulle en C »,

d'où $$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{\vec{P}} = mg(z_A - z_C)$$

soit $$(z_C - z_A) = \frac{v_A^2}{2g} \quad \text{et} \quad z_C = 14{,}7 \text{ m}\Big).$$

β) La loi horaire du mouvement (décrivant aussi bien l'aller uniformément retardé de A vers C, que le retour accéléré de C vers S) est :

$$z = \frac{1}{2}\bar{a}\,t^2 + \overline{v_0}\,t + z_0 = -4{,}9\,t^2 + 10\,t + 9{,}6.$$

La bille arrive en S au bout du temps t_S tel que $z = z_S = 0$. Il ne faut garder que la solution positive de l'équation $-4{,}9\,t_S^2 + 10\,t_S + 9{,}6 = 0$ puisque la bille arrive en S après $t = 0$, date du départ. On trouvera $t_S = 2{,}75$ s.

γ) • Le système bille-Terre, si on néglige le rôle de l'air, ne reçoit pas de travail extérieur : son énergie mécanique $E = Ec + Ep$ reste constante.
L'altitude $z = 0$ étant l'altitude de S, l'énergie potentielle de pesanteur est $Ep = mgz$, l'état de référence étant « la bille en S ». La bille étant ponctuelle $Ec = \frac{1}{2}mv^2$ (si elle n'est pas ponctuelle il faut la supposer en translation). Par suite $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = C^{te}$.

Pour évaluer cette constante, considérons le départ de A : $v_A = 10\ m \cdot s^{-1}$; $z_A = 9{,}6$ m; d'où :

$$E = \frac{1}{2} \times 50 \cdot 10^{-3} \times 10^2 + 50 \cdot 10^{-3} \times 9{,}8 \times 9{,}6 = 7{,}2\ J.$$

• En S la bille arrive avec l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}mv_S^2 + mgz_S = 7{,}2$ J.

Comme $z_S = 0$, on en déduit $v_S \simeq 17\ m \cdot s^{-1}$.
(On aurait pu obtenir v_S par :

$$\overline{v_S} = \bar{a}\,t_S + \overline{v_0} = -gt_S + v_A = -9{,}8 \times 2{,}75 + 10 \simeq 17\ m \cdot s^{-1},$$

ou bien par le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la bille entre A et S.)

E 50. *On lance une balle verticalement, vers le haut. La balle repasse par son point de départ,* D, 1, 8 s *après.*

a) *A quelle vitesse la balle est-elle lancée?*

b) *A quelle hauteur maximale au-dessus du point de départ* D *monte-t-elle? L'intensité du champ de pesanteur est* $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

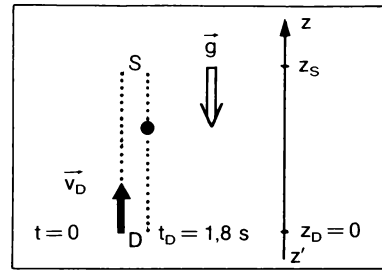
S 50. Présentation de la démarche : la balle est en chute libre dans un espace champ de pesanteur uniforme; elle part d'un point D avec une vitesse verticale, la trajectoire est donc rectiligne, portée par la verticale passant par D; d'après le théorème du centre d'inertie appliqué à la balle dans un repère terrestre $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \vec{g}$; le mouvement étant rectiligne et ayant un vecteur accélération constant est uniformément varié.

a) • Repérons la balle sur l'axe vertical z'z, orienté vers le haut, d'origine D.
• Choisissons l'instant de départ de D comme origine des dates, l'état de mouvement initial est donc caractérisé par $z_0 = 0$ et par $\overline{v_0} = v_D$, v_D étant la vitesse cherchée.

• La mesure algébrique $\bar{a}$ du vecteur accélération $\vec{a} = \vec{g}$ sur z'z est $\bar{a} = -g$ puisque $\vec{g}$ est dans le sens négatif de l'axe.

• La loi horaire du mouvement est donc :

$$z = \frac{1}{2}\bar{a}\,t^2 + \overline{v_0}\,t + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_D\,t.$$



• A la date $t_D = 1{,}8$ s, la balle revient en D de $z_D = 0$, d'où :

$$0 = -\frac{1}{2}gt_D^2 + v_D\,t_D \text{ soit } v_D = \frac{1}{2}gt_D = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 1{,}8 = 8{,}82 \text{ m}.$$

b) • La balle s'arrête de monter en un point S lorsque sa vitesse s'annule.

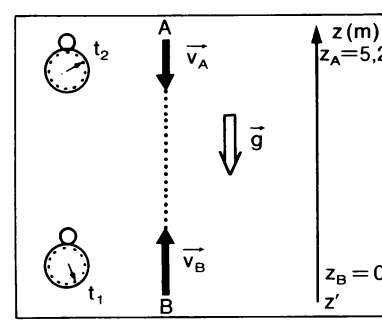
D'après $\overline{v_S^2} - \overline{v_0^2} = 2\bar{a}(z_S - z_0)$, $-v_D^2 = -2gz_S$ d'où $z_S = \dfrac{v_D^2}{2g} = 3{,}97$ m.

(On aurait pu dire qu'il fallait la durée $\dfrac{t_D}{2}$ à la bille pour arriver en S, d'où $z_S = -\dfrac{g}{2}\left(\dfrac{t_D}{2}\right)^2 + v_D\left(\dfrac{t_D}{2}\right) = 3{,}97$ m; on aurait pu utiliser le théorème de l'énergie cinétique; on aurait pu utiliser la conservation de l'énergie mécanique du système balle-Terre.)

E 51. *A est un point situé à la verticale d'un point* B, 5,2 m *au-dessus. De* B, *une bille* b_1 *est lancée verticalement, vers le haut, à la vitesse* $v_B = 6$ m·s^{-1}. *De* A, 0,2 s *après l'instant du départ de* b_1, *une bille* b_2 *est lancée verticalement, vers le bas, à la vitesse* $v_A = 2$ m·s^{-1}.
Quand et où aura lieu le choc des deux billes de dimensions négligeables?
$g = 10$ m·s^{-2}.

S 51. (Rédaction abrégée par endroit.)

• Pour la bille b_1, partant de B :
— repérage dans l'espace sur z'z, vertical, vers le haut, d'origine B, par $\overline{Bb_1} = z_1$;
— repérage dans le temps grâce au chronomètre 1 déclenché à l'instant du départ de b_1 et indiquant la date t_1.
On trouvera facilement
$z_1 = -5t_1^2 + 6t_1$ (1).



• Pour la bille b_2, partant de A :
— repérage dans l'espace sur le même axe z'z par $\overline{Bb_2} = z_2$;
— repérage dans le temps grâce au chronomètre 2 déclenché à l'instant du départ de b_2 et indiquant la date t_2.
On trouvera facilement $z_2 = -5t_2^2 - 2t_2 + 5{,}2$.

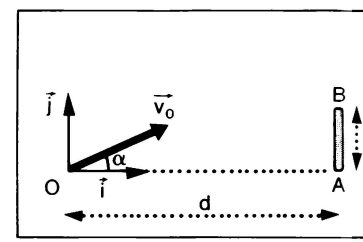
• Le chronomètre 2 est déclenché 0,2 s après le chronomètre 1, donc $t_2 = t_1 - 0{,}2$, par suite la loi horaire de b_2, dans le même repère d'espace et le même repère de temps que ceux utilisés pour b_1, est :

$$z_2 = -5(t_1 - 0{,}2)^2 - 2(t_1 - 0{,}2) + 5{,}2. \qquad (2)$$

• Les deux billes se rencontrent à un instant de date t_1, tel que $z_1 = z_2$, d'après (1) et (2) on en déduira $t_1 = 0{,}9$ s et $z_1 = 1{,}35$ m.

E 52. *On se propose d'étudier un «coup franc» direct en football en faisant les hypothèses simplificatrices suivantes :*
— le ballon est un solide ponctuel;
— l'influence de l'air est négligeable;
— le champ de pesanteur est uniforme et a une intensité $g = 10\ N \cdot kg^{-1}$.

Le ballon est posé en O *sur le sol horizontal, face au but* AB *de hauteur* $h = 2{,}44$ m *et à une distance* $d = 25{,}0$ m *de celui-ci.*
Le joueur, tirant le coup franc, communique au ballon une vitesse initiale $\vec{v}_0$ *dans le plan* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *incliné par rapport à l'horizontale d'un angle* $\alpha = 30°$.



a) *Montrer que la trajectoire du ballon est dans le plan* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

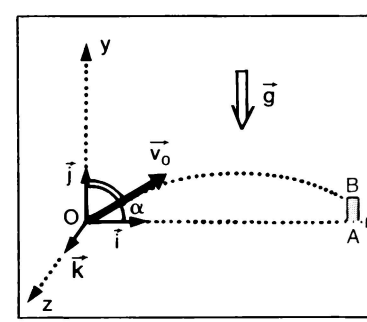
b) *Déterminer l'équation de la trajectoire dans le repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *en fonction de* g, α *et* v_0.

c) *Quelle doit être la vitesse initiale du ballon pour qu'il pénètre dans le but au ras de la barre transversale* B?

d) *Quel intervalle de temps le ballon met-il alors pour passer de* O *à* B? *Quelle est la durée de montée du ballon?* $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

(D'après bac)

S 52. Présentation de la démarche : le ballon est en chute libre dans un champ de pesanteur uniforme; la vitesse initiale est oblique par rapport à la verticale : le ballon va décrire une trajectoire parabolique déterminée par l'état de mouvement initial qu'il faut donc bien préciser.



a) • Le mouvement est à vecteur accélération constant : en effet appliquons au ballon le théorème du centre d'inertie, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ trirectangle, lié au sol donc quasi galiléen, on obtient $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Les coordonnées de $\vec{a}$ sont donc :

$$\vec{a}\ \left|\begin{array}{ll} \dfrac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}=0 & \text{car } \vec{g}\perp\vec{i}\,; \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y}=-g & \text{car } \vec{g} \text{ de sens opposé à } \vec{j}\,; \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=\ddot{z}=0 & \text{car } \vec{g} \text{ perpendiculaire à } \vec{k}. \end{array}\right.$$

• L'état de mouvement initial, en prenant l'origine des dates pour le départ de O, est caractérisé par :

— le vecteur position initiale de coordonnée ($x_0=0$; $y_0=0$; $z_0=0$);

— le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$ $\left|\begin{array}{l} \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0=\dot{x}_0=v_0\cos\alpha \\ \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_0=\dot{y}_0=v_0\sin\alpha \\ \left(\dfrac{dz}{dt}\right)_0=\dot{z}_0=0 \quad \text{car } \vec{v_0}\perp\vec{k} \end{array}\right.$

(le vecteur $\vec{k}$ est perpendiculaire à $\vec{j}$ et à $\vec{i}$, donc à toutes les directions du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

• Par intégration (revoir éventuellement ℳ 2) des coordonnées de $\vec{a}$, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ à la date t :

$$\vec{v}\ \left|\begin{array}{l} \dot{x}=C^{te}=\dot{x}_0=v_0\cos\alpha \\ \dot{y}=-gt+C^{te}=-gt+\dot{y}_0=-gt+v_0\sin\alpha \\ \dot{z}=C^{te}=\dot{z}_0=0. \end{array}\right.$$

• Par intégration des coordonnées de $\vec{v}$, on obtient les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, M désignant le ballon :

$$\overrightarrow{OM}\ \left|\begin{array}{ll} x=v_0(\cos\alpha)\,t+x_0=v_0(\cos\alpha)\,t & (1) \\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0(\sin\alpha)\,t+y_0=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0(\sin\alpha)\,t & (2) \\ z=z_0=0. & (3) \end{array}\right.$$

• Les expressions des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont les lois horaires du mouvement, d'après la troisième loi horaire (3) : $z=0$ quel que soit t, le ballon supposé ponctuel reste dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) L'équation cartésienne de la trajectoire dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'obtient en éliminant le temps t entre les deux lois horaires x et y. D'après la première (1), $t=\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$, reportons dans la deuxième (2) :

$$y=-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

soit

$$y=-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+x\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

c) • Cherchons la valeur qu'il faut donner à v_0 pour que le ballon passe par le point B de coordonnées ($x_B = d$; $y_B = h$).

$$h = -\frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + d \operatorname{tg} \alpha,$$

d'où $$v_0^2 = \frac{gd^2}{2 \cos^2 \alpha (d \operatorname{tg} \alpha - h)} \quad \text{et} \quad v_0 = 18{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

d) • D'après la première loi horaire (1) $x = v_0 (\cos \alpha)\, t$, le ballon arrive en B d'abscisse $x_B = d$ au bout de l'intervalle de temps t_B tel que :

$$t_B = \frac{d}{v_0 \cos \alpha} = \frac{25}{18{,}6 \times \cos 30^\circ} = 1{,}55 \text{ s}.$$

• Au sommet de la trajectoire le vecteur vitesse $\vec{v}$, tangent à l'arc de parabole, est parallèle à l'axe $\overrightarrow{x'x}$, la coordonnée de $\vec{v}$ suivant y'y est nulle : $\dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha = 0$. D'où $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = 0{,}93$ s. Comme le ballon part de O à la date $t = 0$, cette valeur de t représente la durée de montée du ballon. (On en déduit, puisque $t_B = 1{,}55 \text{ s} > 0{,}93$ s, que le ballon passe par B en descendant : c'est ce qui est représenté sur la figure p. 86.)

E 53. *D'un point* O, *à une date* $t = 0$, *on lance un point matériel* M, *de masse* $m = 10$ g *dans le vide, avec un vecteur vitesse* $\vec{v_0}$ *de norme* v_0, *faisant avec la verticale* Oz *passant par* O, *l'angle aigu* α.

a) *Établir dans un référentiel que l'on précisera, l'équation de la trajectoire du point* M.

b) *Lors d'un tir,* $\alpha = 35°$, $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

α) *A quelle hauteur maximale au-dessus de* O, *le mobile monte-t-il? Quelle est alors la vitesse de* M?

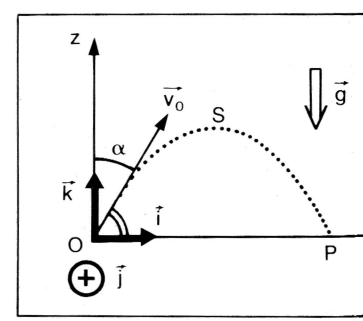
β) *A quelle distance de* O *le mobile passe-t-il dans le plan horizontal passant par* O?

γ) *Quelle est l'énergie mécanique du système* (M, *Terre*) *sachant que* $m = 10$ g *et l'on prend comme état de référence «le point matériel en* O*»? Retrouver l'altitude maximale calculée en* α).

c) *Quelle doit être la valeur minimale de la norme* v_0 *du vecteur vitesse* $\vec{v_0}$, *pour que le point* M *atteigne un point* A *situé dans le plan horizontal passant par* O, *à la distance* OA = 20 m? *Quelle est dans ces conditions la valeur de l'angle de tir* α? $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

(D'après bac

S 53. Présentation de la démarche : le point matériel M est en chute libre parfaite puisqu'il évolue dans le vide; la vitesse initiale est oblique par rapport à la verticale : le point va décrire une trajectoire parabolique déterminée par l'état de mouvement initial, cet état de mouvement initial pouvant varier d'un tir à l'autre.



a) • Choisissons le référentiel terrestre et dans ce référentiel le repère d'espace orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{k}$ vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut, $\vec{i}$ vecteur unitaire horizontal tel que $\vec{v_0}$, représenté à partir de O, soit dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

• D'après le théorème du centre d'inertie appliqué à M, $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$ a pour coordonnées, quel que soit t :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{ll} \ddot{x} = 0 & \text{car } \vec{g} \perp \vec{i} \\ \ddot{y} = 0 & \text{car } \vec{g} \perp \vec{j} \\ \ddot{z} = -g & \text{car } \vec{g} \text{ de sens opposé à } \vec{k}. \end{array} \right.$$

• L'état de mouvement initial est caractérisé par :
— le vecteur position initial nul ($x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0$);
— le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$ $\left| \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 \sin \alpha \\ \dot{y}_0 = 0 \\ \dot{z}_0 = v_0 \cos \alpha. \end{array} \right.$

• Par intégration des coordonnées de $\vec{a}$, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ à la date t :

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x} = C^{te} = \dot{x}_0 = v_0 \sin \alpha \\ \dot{y} = C^{te} = \dot{y}_0 = 0 \\ \dot{z} = -gt + C^{te} = -gt + \dot{z}_0 = -gt + v_0 \cos \alpha. \end{array} \right.$$

• Par intégration des coordonnées de $\vec{v}$, on obtient les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{ll} x = v_0(\sin \alpha)\, t + C^{te} = v_0(\sin \alpha)\, t + x_0 = v_0(\sin \alpha)\, t & (1) \\ y = C^{te} = y_0 = 0 & (2) \\ z = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0(\cos \alpha)\, t + z_0 = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0(\cos \alpha)\, t & (3) \end{array} \right.$$

• D'après la deuxième loi horaire (2) : $y = 0$ quel que soit t, la trajectoire est contenue dans le plan xOz. Pour obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire dans ce plan, il suffit d'éliminer t entre les lois horaires (1) et (3).

D'après (1) $t = \dfrac{x}{v_0 \sin \alpha}$.

En reportant dans (3) : $z = -\dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_0^2 \sin^2 \alpha} + x \operatorname{cotg} \alpha.$ (4)

b) *α)* • Lorsque la bille atteint le point le plus haut, S, de sa trajectoire, son vecteur vitesse $\vec{v}$ est parallèle à Ox, la coordonnée de $\vec{v}$ sur Oz est alors nulle :

$\dot{z} = -gt + v_0 \cos \alpha = 0$, d'où $t_S = \dfrac{v_0 \cos \alpha}{g}$ (5).

Reportons dans la troisième loi horaire pour obtenir l'altitude de S :

$$z_S = -\frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \cos \alpha \cos \alpha}{g}$$

d'où $$z_S = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} = 13{,}7 \text{ m}.$$

• Le vecteur vitesse $\vec{v}$, en S, a pour coordonnées ($\dot{x} = v_0 \sin \alpha$; $\dot{y} = 0$; $\dot{z} = 0$). Sa norme $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = v_0 \sin \alpha = 11{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

β) Soit P l'intersection de la trajectoire de M avec le plan horizontal $z=0$: la distance OP s'appelle la portée du tir dans le plan horizontal passant par le point de lancement. Calculons OP.

— Première solution : écrivons que la trajectoire passe par le point P $(x_P=\overline{OP}\,;\ z=0)$.

D'après l'équation (4) : $0=x\left(-\frac{1}{2}\,g\,\frac{x}{v_0^2\sin^2\alpha}+\operatorname{cotg}\alpha\right)$.

Éliminons la solution $x=0$ qui correspond au point O, l'autre solution est :

$$x_P=\frac{2v_0^2\sin^2\alpha}{g}\operatorname{cotg}\alpha=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\cdot \qquad (5)$$

Numériquement $x_P=38{,}3$ m.

— Deuxième solution : à la date $t=\frac{v_0\cos\alpha}{g}$, le mobile est en S.

Par raison de symétrie la durée de montée de O à S égale la durée de descente de S à P. Par suite le mobile arrive en P à la date $t=\frac{2v_0\cos\alpha}{g}$. En reportant dans la première loi horaire (1), on détermine :

$$x_P=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{g}\cdot \qquad (5)$$

γ) • L'énergie potentielle du système (M, Terre) est $Ep=mgz$, le champ de pesanteur étant uniforme. L'énergie mécanique du système, $E=Ec+Ep=\frac{1}{2}\,mv^2+mgz$, est constante car le système ne reçoit aucun travail extérieur.

Pour l'évaluer considérons l'état de mouvement initial : $v_0=20\ m\cdot s^{-1}$, $z_0=0$; d'où $E=\frac{1}{2}\,mv_0^2=2$ J.

• En S, nous avons vu que $v_S=v_0\sin\alpha$ (revoir *b* α)). L'énergie mécanique se conservant $E=\frac{1}{2}\,mv_S^2+mgz_S=\frac{1}{2}\,mv_0^2$.

D'où $$z_S=\frac{v_0^2}{2g}(1-\sin^2\alpha)=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g}=13{,}7\ m.$$

c) La portée x_P évalué dans l'expression (5) peut s'écrire, en remarquant que $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$:

$$x_P=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g},\ \text{d'où}\ \ v_0^2=\frac{gx_P}{\sin 2\alpha}\cdot$$

Pour une valeur de la portée donnée, x_P, v_0^2, donc v_0, est minimum lorsque $\sin 2\alpha$ est maximum c'est-à-dire lorsque $\sin 2\alpha=1$, c'est-à-dire lorsque $\alpha=45°$.

Dans ce cas la vitesse v_0 minimale est $v_{0_{min}}=\sqrt{gx_P}$. Numériquement pour $x_P=OA=20$ m, $v_{0_{min}}=14\ m\cdot s^{-1}$.

Remarque : pour une valeur de v_0 donnée, x_P est maximal lorsque $\sin 2\alpha=1$ c'est-à-dire pour $\alpha=45°$.

E 54. *Un avion se translate horizontalement, en ligne droite, à vitesse constante* $v_A = 150\ m \cdot s^{-1}$ *par rapport à un repère lié à la Terre. Il survole la mer à l'altitude* 1250 m. *Cet avion lâche un projectile pratiquement ponctuel* M, *à la date* $t = 0$. *On néglige l'action de l'air sur le projectile.*

a) *On raisonne dans un repère lié à l'avion pratiquement galiléen car l'avion est en translation rectiligne et uniforme par rapport à la Terre.*

α) *Quelle est la vitesse* $\vec{V_0}$ *du projectile par rapport à l'avion à* $t = 0$?

β) *Quel est le vecteur accélération* $\vec{A}$ *du projectile par rapport à l'avion?*

γ) *Quelle est la trajectoire du projectile par rapport à l'avion?*

δ) *Quelle est la durée de chute?*

b) *On raisonne dans un repère lié à la Terre que l'on définira.*

α) *Quelle est la vitesse* $\vec{v_0}$ *du projectile à* $t = 0$, *dans ce repère?*

β) *Quelle est la trajectoire du projectile?*

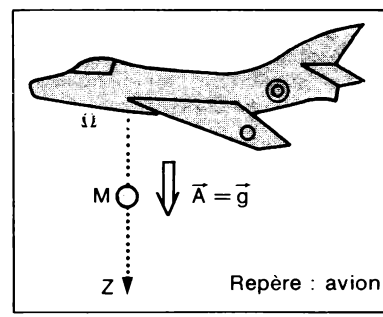
γ) *Quelle est la durée de chute?*

δ) *Quel angle le vecteur vitesse fait-il avec la surface de l'eau juste avant que le projectile touche l'eau?* $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

S 54. (Rédaction très abrégée par endroits.)

a) α) $\vec{V_0} = \vec{0}$: le projectile part du point Ω de l'avion à vitesse nulle par rapport à l'avion.

β) Le théorème du centre d'inertie s'applique dans le repère avion pratiquement galiléen. Le système est le projectile, il est soumis à son poids $\vec{P}$, il prend l'accélération $\vec{A}$ telle que $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{A}$. D'où $\vec{A} = \vec{g}$.



γ) • Le mouvement de M dans un repère lié à l'avion est un mouvement de chute libre sans vitesse initiale, la trajectoire est donc rectiligne parallèle à $\vec{A} = \vec{g}$, passant par Ω : le projectile reste sur l'axe ΩZ (toujours à l'aplomb de Ω).

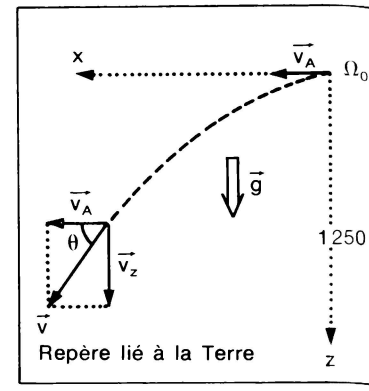
δ) • La loi horaire du mouvement de M sur ΩZ est $Z = \frac{1}{2}\vec{A}\,t^2 + \vec{V_0}\,t + Z_0$, soit $Z = \frac{1}{2}gt^2$. Le projectile M touche l'eau lorsque $Z = 1250$ m, soit après une durée de chute $t = \sqrt{\frac{2Z}{g}} \simeq 16$ s.

b) α) Soit le repère lié à la Terre (Ω_0, x, y, z), Ω_0 position de Ω à la date $t = 0$, $\Omega_0 x$ axe horizontal de mêmes direction et sens que $\vec{v_A}$, $\Omega_0 z$ axe vertical orienté vers le bas, $\Omega_0 y$ perpendiculaire aux 2 autres est perpendiculaire à la figure ci-après.

Dans ce repère $\vec{v_0} = \vec{v_A}$: le projectile a initialement la vitesse de l'avion.

β) On trouvera que la trajectoire est un arc de parabole d'équation $z = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_A^2}$, situé dans le plan $x\Omega_0 z$, tangent à $\vec{v_A}$ au point Ω_0.

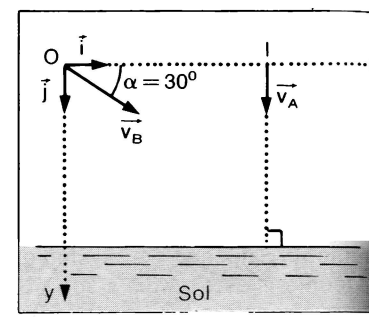
γ) $z = \frac{1}{2} gt^2$ conduit à $t = \sqrt{\frac{2z}{g}} \simeq 16$ s.



δ) A tout instant $\vec{v} = \vec{v_x} + \vec{v_z} = \vec{v_A} + \vec{v_z}$ puisque $\vec{v_x}$ reste égal à $\vec{v_A}$. Pour $t = 16$ s, on trouvera $v_z = gt = 9{,}8 \times 16 = 157$ m·s^{-1}.

L'angle θ entre $\vec{v}$ et la surface de l'eau horizontale est tel que $\text{tg}\,\theta = \frac{v_z}{v_A} = 1{,}05$ d'où $\theta = 46{,}3°$.

E 55. *Dans tout le problème on négligera l'action de l'air. On prendra* $g = 10$ m·s^{-2}. *On raisonnera dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *lié à la Terre. On choisira comme origine des dates l'instant où les mobiles quittent le plan horizontal contenant les points* O *et* I.



a) *Une bille* A *assimilable à un point matériel passe en* I *à l'instant* $t = 0$ *avec une vitesse verticale, vers le bas, de norme* $v_A = 7$ m·s^{-1}. *Établir l'équation horaire du mouvement de la bille.*

b) *A l'instant* $t = 0$, *on lance d'un point* O *une deuxième bille* B, *assimilable à un point matériel, dans les conditions précisées sur la figure :* $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{v_B}) = \alpha = 30°$; $OI = d = 3$ m.

α) *Établir l'équation horaire du mouvement projeté sur l'axe* Ox *ainsi que celle du mouvement projeté sur l'axe* Oy.

β) *Calculer la norme* v_B *de la vitesse initiale pour que le choc entre les deux billes se produise. Déterminer l'instant et l'endroit du choc.*

(D'après bac)

S 55. (Nous donnons essentiellement les réponses.)

a) La bille A, repérée par (x_A, y_A) est en chute libre verticale accélérée $x_A = d = 3$; $y_A = 5t^2 + 7t$; (en unités S.I.).

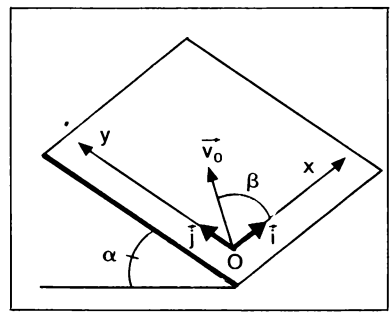
b) α) La bille B, repérée par (x_B, y_B) est en chute libre parabolique, dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$:
$x_B = v_B (\cos 30°)\, t = 0{,}866\, v_B t$;
$y_B = 5t^2 + v_B (\sin 30°)\, t = 5t^2 + 0{,}5\, v_B t$; (en unités S.I.).

c) Les lois précédentes sont établies dans le même repère d'espace $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et dans le même repère de temps (l'origine des dates $t = 0$ est la même), dans ces conditions les deux billes se rencontrent lorsqu'au même instant t, $x_A = x_B$ et $y_A = y_B$.
D'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} 3 = 0{,}866\, v_B\, t & (1) \\ 5\, t^2 + 7\, t = 5\, t^2 + 0{,}5\, v_B\, t. & (2) \end{cases}$$

On trouvera d'après (2) $v_B = \dfrac{7}{0{,}5} = 14\ m \cdot s^{-1}$, d'après (1) $t = 0{,}247$ s, puis les coordonnées du point de choc ($x = 3$ m; $y = 2{,}03$ m).

E 56. *D'un point* O *situé dans le coin inférieur d'une table soufflante, inclinée d'un angle* α *sur le plan horizontal, on lance, à la date* $t = 0$, *un palet pratiquement ponctuel avec une vitesse* $\vec{v_0}$ *parallèle au plan de la table, suivant une direction faisant un angle* β *avec l'horizontale.*



a) *Déterminer les coordonnées* $a_x = \ddot{x}$ *et* $a_y = \ddot{y}$ du vecteur accélération $\vec{a}$ *du palet dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\vec{i}$: *vecteur horizontal;* $\vec{j}$: *vecteur parallèle à la ligne de plus grande pente de la table:* $\vec{i} \perp \vec{j}$).

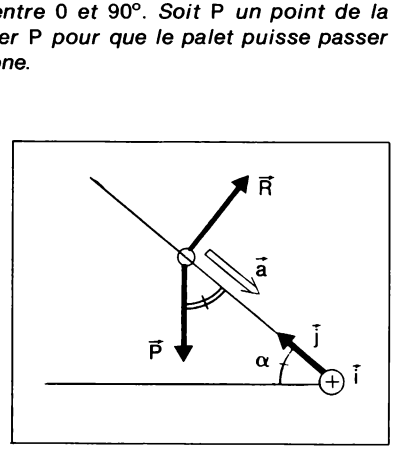
b) *Déterminer les lois horaires* $x = f(t)$ *et* $y = g(t)$ *ainsi que l'équation cartésienne de la trajectoire.*

c) *Schant que le sommet* S *de la trajectoire a pour ordonnée* $y_S = 0{,}5$ m, *que* $\alpha = 10°$; $\beta = 60°$; $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$; *en déduire* v_0.

d) *A quelle distance de* O *le palet recoupe-t-il l'axe* Ox?

e) *Le palet est toujours lancé de* O *avec la même vitesse initiale* v_0 *évaluée au* c), α *reste inchangé, mais d'un tir à l'autre* β *varie entre* 0 *et* 90°. *Soit* P *un point de la table, dans quelle zone de la table doit se trouver* P *pour que le palet puisse passer par* P? *On représentera graphiquement cette zone.*

S 56. *a*) • Présentation de la démarche : le palet n'est pas en chute libre puisqu'il est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$, à la force $\vec{R}$ due au coussin d'air, perpendiculaire à la table; le palet restant dans le plan de la table, nous en déduisons que son vecteur accélération $\vec{a}$ est parallèle au plan de la table, on peut donc écrire $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$.



• Le palet est soumis aux forces $\vec{P}$ et $\vec{R}$. Dans le repère table, quasi galiléen comme le repère Terre, d'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} = m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}). \qquad (1)$$

Remarquons que $\vec{R}$ étant perpendiculaire au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est perpendiculaire à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$; quant à $\vec{P}$, vertical, il est perpendiculaire à $\vec{i}$, horizontal.

• Multiplions (1) scalairement par $\vec{i}$:

$$\vec{P} \cdot \vec{i} + \vec{R} \cdot \vec{i} = m(\ddot{x}\vec{i} \cdot \vec{i} + \ddot{y}\vec{j} \cdot \vec{i}).$$

D'où $$0 + 0 = m\ddot{x} \quad \text{soit } \ddot{x} = 0.$$

• Multiplions (1) scalairement par $\vec{j}$:

$$\vec{P} \cdot \vec{j} + \vec{R} \cdot \vec{j} = m(\ddot{x}\vec{i} \cdot \vec{j} + \ddot{y}\vec{j} \cdot \vec{j}).$$

D'où $$-P \sin \alpha + 0 = m\ddot{y} \quad \text{soit } \ddot{y} = -g \sin \alpha.$$

b) • L'état de mouvement initial est caractérisé :

— par le vecteur $\vec{v_0}$ $\dot{x}_0 = v_0 \cos \beta$
$\dot{y}_0 = v_0 \sin \beta$;

— par le vecteur position nul : $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$.

• Par intégration $\ddot{x} = 0$ conduit à $\dot{x} = C^{te} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \beta$ puis à $x = v_0 (\cos \beta) t + x_0 = v_0 (\cos \beta) t$.

• Par intégration $\ddot{y} = -g \sin \alpha$ conduit à $\dot{y} = -g(\sin \alpha) t + \dot{y}_0 = -gt \sin \alpha + v_0 \sin \beta$, puis à $y = -\frac{g}{2} t^2 \sin \alpha + v_0 t \sin \beta$ (en remarquant que $y_0 = 0$).

• En éliminant t entre les deux lois horaires, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \beta}$$

en reportant dans y :

$$y = \frac{-g \sin \alpha x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \beta} + x \operatorname{tg} \beta,$$

cette trajectoire est un arc de parabole.

c) • L'abscisse du sommet de la parabole x_S est telle que $\frac{dy}{dx} = 0$, soit :

$$\frac{-g \sin \alpha x_S}{v_0^2 \cos^2 \beta} + \operatorname{tg} \beta = 0,$$

d'où $$x_S = \frac{v_0^2 \cos \beta \sin \beta}{g \sin \alpha}.$$

• Reportons dans l'équation de la trajectoire :

$$y_S = \frac{-g \sin \alpha v_0^4 \cos^2 \beta \sin^2 \beta}{2 v_0^2 \cos^2 \beta g^2 \sin^2 \alpha} + \frac{v_0^2 \cos \beta \sin \beta \operatorname{tg} \beta}{g \sin \alpha}.$$

Après simplification :

$$y_S = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{2 g \sin \alpha}.$$

• Calculons v_0 :

$$v_0 = \frac{\sqrt{2\,g \sin \alpha y_S}}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{2 \times 9{,}8 \times \sin 10^\circ \times 0{,}5}}{\sin 60^\circ} \simeq 1{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

d) L'arc de parabole admet pour axe de symétrie la droite parallèle à Oy passant par le sommet S, le palet recoupe l'axe Ox en un point d'abscisse $2x_S$ soit :

$$\frac{2v_0^2 \cos \beta \sin \beta}{g \sin \alpha} \simeq 1{,}15 \text{ m}.$$

e) • Présentation de la démarche : les coordonnées, x et y du point P, doivent vérifier l'équation de la trajectoire; on obtient une équation que l'on peut ramener à une équation du second degré en tg β; cette dernière équation devant avoir des racines, il faut que son discriminant Δ soit positif ou nul.

• En remarquant que $\frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \text{tg}^2 \beta$, l'équation de la trajectoire s'écrit :

$$y = \frac{-g \sin \alpha x^2}{2v_0^2} (1 + \text{tg}^2 \beta) + x \text{ tg } \beta.$$

• Ordonnons en tg β :

$$\frac{g \sin \alpha x^2}{2v_0^2} \text{tg}^2 \beta - x \text{ tg } \beta + \left(\frac{g \sin \alpha x^2 + 2v_0^2 y}{2v_0^2} \right) = 0.$$

• Son discriminant est :

$$\Delta = x^2 - \frac{4g \sin \alpha x^2}{4v_0^4} (g \sin \alpha x^2 + 2v_0^2 y)$$

$$\Delta = x^2 \left[1 - \frac{g \sin \alpha}{v_0^4} (g \sin \alpha x^2 + 2v_0^2 y) \right].$$

• $\Delta \geqslant 0$ implique :

$$v_0^4 - g^2 \sin^2 \alpha x^2 - 2g \sin \alpha v_0^2 y \geqslant 0 \qquad (1)$$

soit

$$v_0^4 - g^2 \sin^2 \alpha x^2 \geqslant 2g \sin \alpha v_0^2 y.$$

Divisons par le nombre positif $2g \sin \alpha v_0^2$:

$$y \leqslant \frac{-g \sin \alpha}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}.$$

• Traçons la parabole d'équation $y = \frac{-g \sin \alpha}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$. Remarquons que :

— pour $x = 0$, $y = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} = 0{,}66$ m;

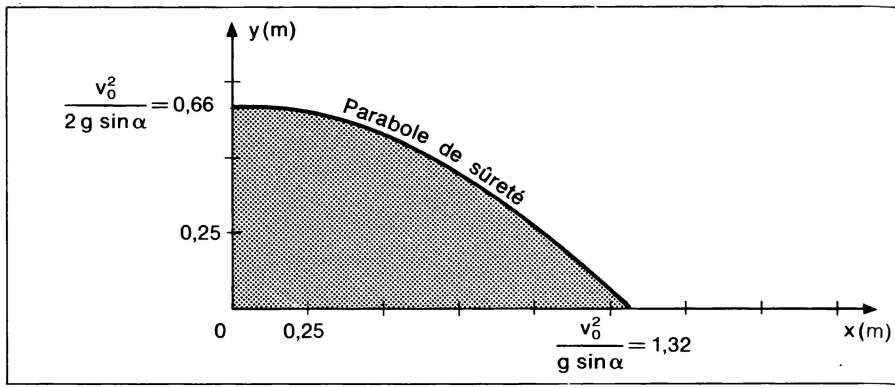
— pour $y = 0$, $x = \frac{v_0^2}{g \sin \alpha} = 1{,}32$ m.

• *Discussion.*

— Pour tout point situé à l'intérieur de la zone limitée par la parabole (en gris sur la figure), $\Delta > 0$ (vérifier pour le point O que l'expression (1) est positive) : il y a donc deux angles de tir possibles permettant d'atteindre ce point.

— Pour tout point de la parabole, il n'y a qu'un angle de tir pour l'atteindre.

— Il n'est pas possible d'atteindre les points extérieurs à la zone grise car Δ est alors négatif. Pour cette raison, en balistique, cette parabole est appelée la parabole de sûreté pour des tirs de vitesse initiale donnée, partant d'un point donné.



POURQUOI ?

• *Il faut bien une autre force que le poids pour lancer le projectile étudié, pourquoi n'en tient-on pas compte?*

Dans le lanceur (main d'un observateur, plan incliné, ressort, élastique, gaz comprimé...) le projectile est effectivement soumis à d'autres forces que son poids. Sous l'action de ces forces le projectile acquiert en fin de lanceur le vecteur vitesse $\vec{v_0}$. Ensuite commence la chute libre : le vecteur vitesse initiale de la chute libre est le vecteur vitesse $\vec{v_0}$ en fin de lanceur. Comme nous n'étudions que la chute libre, seul nous intéresse le vecteur vitesse $\vec{v_0}$.
(De même la chute libre a une fin : quand on demande la vitesse finale de la chute, il s'agit bien entendu de la vitesse juste avant que le projectile rencontre l'obstacle qui met fin à la chute libre et qui fait intervenir d'autres forces que le poids).

• *Pouvez-vous repréciser ce qui se passe pour la vitesse lorsque le mobile passe par le point le plus haut de sa trajectoire parabolique?*

Lorsque le mobile passe par le point le plus haut, sa vitesse ascensionnelle est nulle. Précisons. Supposons que l'axe vertical soit l'axe z'z, au point le plus haut la coordonnée de $\vec{v}$ suivait z'z, notée $\frac{dz}{dt}$ ou $\dot{z}$ ou $\overline{v_z}$, est nulle. Le vecteur vitesse est alors horizontal, mais n'est pas nul.

• *Pourquoi dans certaines formules, mettez-vous les* cos α, sin α, ... *entre parenthèses?*

Nous mettons des parenthèses lorsque cos α, sin α, ... sont suivis de t, ceci pour que l'on n'ait pas tendance à croire que la fonction du temps est cos (αt), ...

• *Pourquoi prend-on presque toujours la date origine au début du mouvement de chute libre?*

Cela n'est nullement obligatoire. Cependant en choisissant la date $t = 0$ pour l'instant de départ de la chute libre, la date t qui intervient dans les lois horaires représente aussi la durée de la chute libre (ce qui ne serait pas le cas si la chute commençait à t_0, la durée serait alors $(t - t_0)$).

• *A quelles conditions y a t-il un choc entre deux projectiles?*

Il faut d'abord que les deux trajectoires se coupent, mais cela ne suffit pas. Il faut de plus que les deux projectiles arrivent au même instant au point de rencontre des trajectoires.

• *Est-ce qu'on peut négliger le rôle de l'air pour un parachutiste «en chute libre»?*

Le parachutiste qui n'a pas encore ouvert son parachute subit une action de l'air non négligeable qui prend de plus en plus d'importance au fur et à mesure que sa vitesse croît, il n'est pas en chute libre au sens des physiciens.

5 MOUVEMENTS DANS UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE UNIFORME

E 57. *On considère deux plaques* A *et* B, *conductrices, parallèles, verticales et distantes de* $d = 0{,}10$ m. *On applique entre* A *et* B *une tension électrique constante* $U_{AB} = V_A - V_B = 10^4$ V. *Le champ électrique est uniforme entre* A *et* B.
Les plaques sont percées aux points A′ *et* B′ *situés sur une même droite horizontale perpendiculaire aux plans des plaques. Le dispositif est placé dans le vide.*
Des ions zinc II Zn^{2+}, *de masse* $m = 1{,}16 \cdot 10^{-25}$ kg, *pénètrent en* A′ *avec une vitesse pratiquement nulle. La charge élémentaire* $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

a) *Quelles sont les caractéristiques de la force électrique* $\vec{F}$ *qui s'exerce sur chaque ion entre les deux plaques* A *et* B *?*

b) *Évaluer le rapport* $\frac{P}{F}$, P *poids d'un ion. Conclure. On prendra* $g = 10\,N \cdot kg^{-1}$.

c) *Exprimer l'énergie cinétique* $E_{C,B'}$ *de chaque ion arrivant en* B′ *en fonction de* e *et* U_{AB}. *La calculer en joules et en électron-volts. En déduire la vitesse d'un ion passant par* B′.

d) *Quelle est la nature du mouvement des ions entre* A′ *et* B′ *? En déduire l'intervalle de temps nécessaire à un ion pour passer de* A′ *à* B′.

(D'après bac)

25 **Action d'un champ électrostatique sur un corps chargé.**

• Un corps ponctuel portant la charge q (positive ou négative exprimée en coulombs C), placé en un point d'un espace champ électrostatique où le vecteur champ électrostatique est $\vec{E}$ (en volt par mètre $V \cdot m^{-1}$), subit la force électrique (exprimée en newton N) :

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

• Lorsque ce corps ponctuel chargé passe d'un point A d'un espace champ électrostatique où le potentiel électrique (mesuré par rapport à un point de référence à potentiel zéro) est V_A, à un point B où le potentiel est V_B, le travail de la force électrique, indépendant du chemin suivi, est :

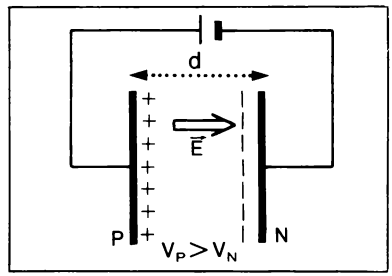
$$W_{\vec{F}} = q(V_A - V_B).$$

Ce travail peut être exprimé en joule J si q est en coulomb et si la différence de potentiel $(V_A - V_B)$ ou tension U_{AB} est exprimée en volt; on peut aussi l'exprimer en électron-volts :

$$1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J.$$

• La charge q placée dans l'espace champ électrostatique possède une énergie potentielle électrique $E_p = qV$, l'état de référence étant « la charge q est placée au point à potentiel nul ».

• Pour obtenir un espace champ électrostatique (ou électrique) uniforme, c'est-à-dire où le vecteur $\vec{E}$ est le même en tous les points, on utilise deux plaques conductrices, parallèles, distantes de d, formant un condensateur plan.



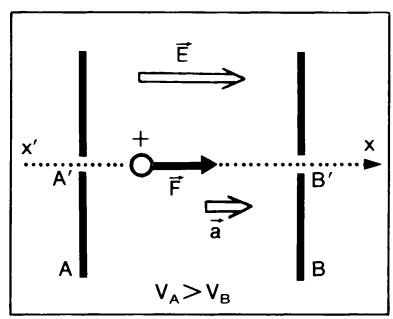
A l'intérieur de ce condensateur sous tension, le champ électrique est caractérisé par le vecteur $\vec{E}$:

— perpendiculaire aux plaques;
— dirigé de la plaque + vers la plaque −, c'est-à-dire de la plaque à potentiel le plus élevé vers la plaque à potentiel le plus bas;
— de module, en désignant par U la valeur absolue de la tension $V_P - V_N$,

$$E = \frac{U}{d}.$$

S 57. *a*) • Entre les plaques A et B le champ électrique est uniforme, il est caractérisé par un vecteur $\vec{E}$:
— perpendiculaire aux plaques, donc parallèle à A'B';
— dirigé de la plaque A à potentiel le plus élevé vers la plaque B;
— de module

$$E = \frac{U_{AB}}{d} = \frac{10^4}{0{,}1} = 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$



• Un ion zinc de charge $q = +2e$ est soumis à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$. La force $\vec{F}$ a même direction que $\vec{E}$, même sens puisque que q est positive; son module est $F = 2eE = 3{,}2 \cdot 10^{-14}$ N.

b) Le poids d'un ion $P = mg$, le rapport $\frac{P}{F} = \frac{mg}{F} = 3{,}62 \cdot 10^{-11}$: il est très faible devant 1. On peut donc négliger le poids d'un ion devant la force électrique qui lui est appliquée.

c) • Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un ion passant de A' à B'.
• Le repère lié au dispositif, donc à la Terre, est pratiquement galiléen.
• L'ion est soumis à la force électrique $\vec{F}$ due au condensateur plan, à son poids $\vec{P}$ dû à la Terre que nous négligerons devant $\vec{F}$.

Le travail de $\vec{F}$, lorsque l'ion passe de A′ à B′, est $W_{\vec{F}} = q(V_{A'} - V_{B'}) = qU_{AB}$.

• D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{C,B'} - E_{C,A'} = W_{\vec{F}} = qU_{AB}.$$

Comme $q = 2e$ et $E_{C,A'} \simeq 0$, il s'ensuit $E_{C,B'} = 2eU_{AB}$.

• Numériquement, en unités internationales,

$$E_{C,B'} = 2 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 10^4 = 3{,}2 \cdot 10^{-15} \text{ J}.$$

En électron-volts, $E_{C,B'} = \dfrac{3{,}2 \cdot 10^{-15}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 2 \cdot 10^4$ eV.

• Supposons que l'ion obéisse aux lois de la mécanique newtonienne, dans ce cas son énergie cinétique a pour expression $E_{C,B'} = \dfrac{1}{2} m v_{B'}^2$ (revoir ℳ 11).

D'où $v_{B'} = \sqrt{\dfrac{4eU_{AB}}{m}} = 2{,}35 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Cette vitesse est inférieure à $\dfrac{c}{10} = 3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, les lois de la mécanique newtonienne sont donc valables.

d) • Présentation de la démarche : l'ion part sans vitesse de A′, il est soumis à une force constante $\vec{F}$ parallèle à A′B′, l'ion reste donc sur la droite A′B′. (On pourrait bien sûr le justifier en choisissant 3 axes et en intégrant les coordonnées du vecteur accélération; comme nous admettions cette propriété dans le cas de la chute libre sans vitesse initiale, il n'y a aucune raison de la démontrer ici.) D'après le théorème du centre d'inertie nous allons déterminer les caractéristiques du vecteur accélération.

• Le système est un ion; le repère, lié au dispositif, est quasi galiléen.

L'ion est soumis essentiellement à la force électrique $\vec{F}$, d'après le théorème du centre d'inertie $\vec{F} = m\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \dfrac{q\vec{E}}{m}$. Le vecteur $\vec{a}$ est donc parallèle à A′B′ (c'est évident puisque le mouvement est rectiligne suivant A′B′); a le sens de $\vec{E}$; sa mesure algébrique sur l'axe x′x, passant par A′ et B′, dirigé de A′ vers B′, est $\bar{a} = \dfrac{2eE}{m} = 2{,}76 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

L'accélération algébrique du mouvement rectiligne étant constante, le mouvement est rectiligne uniformément varié (plus précisément uniformément accéléré car $\bar{v}\,\bar{a} > 0$, revoir ℳ 8).

• Le mouvement étant uniformément varié, en choisissant A′ comme point origine de l'axe x′x, l'instant de passage d'un ion par A′ comme origine des dates, et en appelant x l'abscisse de cet ion : $x = \dfrac{1}{2}\bar{a}\,t^2 + \overline{v_0}\,t$, $\qquad \overline{v_0} = v_A \simeq 0$,

d'où $x = \dfrac{1}{2}\bar{a}\,t^2$ et $t_{A'B'} = \sqrt{\dfrac{2d}{a}} = 8{,}51 \cdot 10^{-7}$ s.

E 58. *On considère deux plaques conductrices, parallèles. Les plaques sont percées aux points* O *et* O′ *de façon que* OO′ *soit perpendiculaire aux plaques. Le dispositif est dans le vide.*

a) *Un ion fluorure* F^- *de masse* $m = 3{,}15 \cdot 10^{-26}$ kg *arrive en* O, *avec un vecteur vitesse* $\vec{v_0}$ *de direction* OO′, *de module* v_0.

Lorsque la tension $U_{OO'} = 100$ V, *l'ion arrive en O' à vitesse nulle.*
Quelle est l'énergie cinétique de l'ion $E_{c,O}$ *en O? On l'exprimera en joule et en électron-volt? En déduire la vitesse* v_0. *On négligera le poids de l'ion devant la force électrique, les lois de la mécanique newtonienne sont applicables à un ion dans tout le problème.*

b) *Un autre ion part de O avec le même état de mouvement, quelle valeur faut-il donner à* $U_{OO'}$ *pour que l'ion ait l'énergie cinétique* 3 100 eV *en O'?*

c) *Quelle est alors la distance* $d = OO'$ *sachant que l'ion met la durée* 1 µs *pour passer de O à O'?*

26 Multiples et sous-multiples à connaître.

Multiples			Sous-multiples		
déca	da	10^1	déci	d	10^{-1}
hecto	h	10^2	centi	c	10^{-2}
kilo	k	10^3	milli	m	10^{-3}
méga	M	10^6	micro	µ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
			pico	p	10^{-12}
			femto	f	10^{-15}

S 58. *a*) • Appliquons à l'ion F^-, le théorème de l'énergie cinétique dans un repère lié au dispositif, donc à la Terre, quasi galiléen, entre les points O et O'.
L'ion est soumis essentiellement à la force électrique $\vec{F}$ due au condensateur sous tension, le travail de $\vec{F}$ lorsque l'ion passe de O à O' est $W_{\vec{F}} = q(V_O - V_{O'})$ avec $q = -e$ et $V_O - V_{O'} = U_{OO'}$. (Remarquons qu'il n'est pas nécessaire pour appliquer cette formule de préciser les caractéristiques de $\vec{F}$ et la trajectoire qui fait passer de O à O'.)
D'après le théorème de l'énergie cinétique $E_{c,O'} - E_{c,O} = W_{\vec{F}} = -eU_{OO'}$.
Lorsque $U_{OO'} = 100$ V, $E_{c,O'} = 0$, par suite :

$$E_{c,O} = eU_{OO'} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 100 = 1{,}6 \cdot 10^{-17} \text{ J.}$$

(Remarquons que l'énoncé ne donne pas la valeur de la charge élémentaire, il faut la connaître.)

En électron-volts, $E_{c,O} = \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-17}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 100$ eV.

• En mécanique newtonienne $E_{c,O} = \dfrac{1}{2} mv_0^2$,

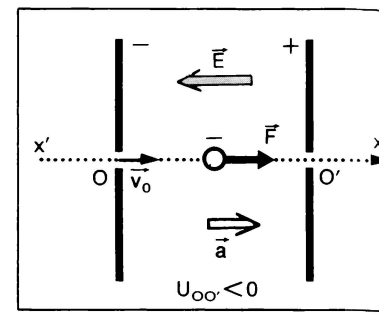
d'où $$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_{OO'}}{m}} = 3{,}19 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) • Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'ion F^-, comme ci-dessus :

$$E_{c,O'} - E_{c,O} = -eU_{OO'}, \text{ d'où } U_{OO'} = \frac{E_{c,O} - E_{c,O'}}{e}.$$

Numériquement $E_{C,O} = 1{,}6 \cdot 10^{-17}$ J; $E_{C,O'} = 3\,100$ eV $= 4{,}96 \cdot 10^{-16}$ J; par suite $U_{OO'} = -3\,000$ V.
Remarquons que dans la première question l'ion négatif était freiné, la plaque O devait être chargée positivement, c'est-à-dire être au potentiel le plus élevé; au contraire dans la deuxième question, l'ion négatif est accéléré, la plaque O doit être chargée négativement c'est-à-dire être au potentiel le plus bas, $U_{OO'}$ est alors négatif.

c) Présentation de la démarche : il est nécessaire de préciser la nature du mouvement de l'ion entre O et O' pour faire intervenir le temps; la vitesse $\vec{v_0}$ est parallèle à OO', la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ est elle aussi parallèle à OO' comme $\vec{E}$, il s'ensuit que la trajectoire est le segment OO' (pensez à la chute libre avec une vitesse initiale verticale comme le poids); le théorème du centre d'inertie appliqué à l'ion va nous donner les caractéristiques de l'accélération de l'ion.



- Le système est l'ion passant de O à O'.
- Le repère lié au dispositif, donc à la Terre, est quasi galiléen.
- L'ion est soumis essentiellement à la force électrique $\vec{F}$ due au jeu de plaques sous tension. Cette force $F = q\vec{E} = -e\vec{E}$.
- D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ d'où } \vec{a} = \frac{-e\vec{E}}{m}.$$

Comme $\vec{E}$ est un vecteur constant de O à O', parallèle à O'O, de sens O' vers O puisque $U_{OO'} < 0$, de module $E = \frac{|U_{OO'}|}{d} = \frac{U_{O'O}}{d}$; il en découle que $\vec{a}$ est constant de O à O', parallèle à OO', de sens O vers O', de module $\frac{eU_{O'O}}{md}$. Sa mesure algébrique $\bar{a}$ sur x'x est $\bar{a} = \frac{eU_{O'O}}{md}$.
Le mouvement est donc rectiligne uniformément varié puisque $\bar{a}$ est constant.
- En prenant le point O comme origine de x'x, l'instant de passage de l'ion en O comme origine des dates, l'abscisse x de cet ion est telle que :

$$x = \frac{1}{2}\frac{eU_{O'O}}{md}t^2 + \bar{v_0}t \text{ avec } \bar{v_0} = v_0.$$

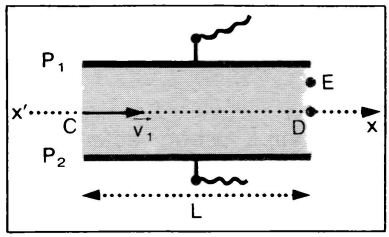
Pour $x = d$, $t = t_1 = 1\ \mu s = 10^{-6}$ s : $d = \frac{1}{2}\frac{eU_{O'O}}{md}t_1^2 + v_0 t_1$.
Dans cette équation d est l'inconnue, on aboutit à :

$$d^2 - v_0 t_1 d - \frac{eU_{O'O}t_1^2}{2m} = 0$$

qui admet pour solution positive $d = 0{,}105$ m.

E 59. *Une particule α est un noyau d'hélium* He^{2+}, *de masse* $m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg. *Une telle particule pénètre en* C, *dans un espace champ électrique uniforme, avec un vecteur vitesse* $\vec{v_1}$ *horizontal, de direction* x'x.

Le champ électrique est créé par une tension électrique $U_{P_2P_1} > 0$, *appliquée entre deux plateaux conducteurs horizontaux distants de* d = 5 cm, *de longueur, suivant* x'x, L = 20 cm. *L'ensemble est dans le vide.*



a) *Quand* $U_{P_2P_1} = 0$, *la particule sort en* D *situé sur* x'x. *Justifier rapidement pourquoi.*

b) *Quand* $U_{P_2P_1} = U = 3.10^4$ V, *la particule sort en* E, *tel que* DE = b = 1 cm.

α) *En prenant un repère d'espace que l'on précisera, déterminer la trajectoire de la particule α de* C *à* E.

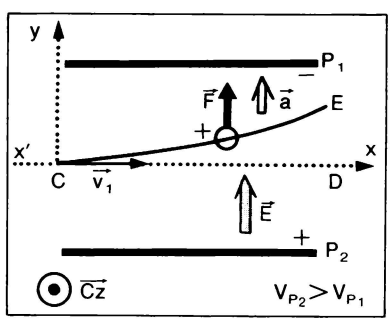
β) *En déduire la vitesse d'arrivée de la particule α en* C.

γ) *Calculer la vitesse de sortie de la particule α en* E. *D'après vous le champ électrique dans cette expérience a comme rôle essentiel :*
— *d'accélérer la particule α ?*
— *de dévier la particule α ?*
Note : « accélérer » a le sens usuel « augmenter la vitesse » et non pas « donner un vecteur accélération ».

(D'après bac)

S 59. *a*) Quand $U_{P_2P_1} = 0$, le champ électrique est nul. La particule α, uniquement soumise à son poids est en chute libre : elle décrit théoriquement un arc de parabole tangent à $\vec{v_1}$ en C. Mais la vitesse v_1 est très grande, la distance CD petite, de ce fait l'arc de parabole très tendu est pratiquement rectiligne dans le prolongement de $\vec{v_1}$. De plus le travail du poids ne modifie pratiquement pas l'énergie cinétique initiale de la particule assez importante : le mouvement est pratiquement uniforme.
Souvent on résume les considérations précédentes en disant que « l'effet du poids » de la particule étant négligeable, la particule est pratiquement en mouvement rectiligne et uniforme.

b) α) • Présentation de la démarche : le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme; la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ est constante; nous allons découvrir que le vecteur accélération $\vec{a}$ a des coordonnées constantes; par intégration de ces coordonnées nous déterminerons les lois du mouvement, puis la trajectoire.



• Le repère orthonormé (C, x, y, z), lié à l'appareil, donc à la Terre, est quasi galiléen. L'axe Cy est dirigé de P_2 vers P_1, l'axe Cz est perpendiculaire à la figure ci-contre.

• Le système est la particule α soumise à la force électrique $\vec{F}$ due au jeu de plaques sous tension, à son poids $\vec{P}$ que nous négligerons devant $\vec{F}$.

• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{F} = m\vec{a}$, d'où :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} = \frac{2e\vec{E}}{m}.$$

Le vecteur $\vec{E}$ est un vecteur le même en tous les points, perpendiculaire à P_1 et à P_2 donc parallèle à Cy, dirigé de P_2 vers P_1 puisque $U_{P_2P_1} > 0$, de module $E = \frac{U}{d}$.

Par suite $\vec{a}$ est constant, de mêmes direction et sens que $\vec{E}$, de module $a = \frac{2eU}{md}$.

Les coordonnées de $\vec{a}$ sont $\left| \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = a = \frac{2eU}{md} \\ \ddot{z} = 0. \end{array} \right.$

• L'état de mouvement initial, en prenant l'origine des dates à l'instant où la particule α passe par C, est caractérisé par :

— le vecteur position initial nul ($x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0$);

— le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0} = \vec{v_1}$ de coordonnées :

$$\vec{v_0} \left| \begin{array}{l} \dot{x}_0 = v_1 \\ \dot{y}_0 = 0 \\ \dot{z}_0 = 0. \end{array} \right.$$

• Par intégration des coordonnées de $\vec{a}$, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ à la date t :

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x} = C^{te} = \dot{x}_0 = v_1 \\ \dot{y} = \frac{2eU}{md} t + C^{te} = \frac{2eU}{md} t \ (\text{car } \dot{y}_0 = 0) \\ \dot{z} = C^{te} = \dot{z}_0 = 0. \end{array} \right.$$

• Par intégration des coordonnées de $\vec{v}$, on obtient les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{CM}$, M désignant la particule α :

$$\overrightarrow{CM} \left| \begin{array}{l} x = v_1 t + C^{te} = v_1 t \ (\text{car } x_0 = 0) \\ y = \frac{2eU}{md} \frac{t^2}{2} + C^{te} = \frac{eU}{md} t^2 \ (\text{car } y_0 = 0) \\ z = C^{te} = z_0 = 0. \end{array} \right.$$

• La particule α reste donc dans le plan $z = 0$. Pour obtenir l'équation de la trajectoire rapportée à (C, x, y), il suffit d'éliminer t entre les deux premières lois horaires.

D'après la première $t = \frac{x}{v_1}$, en reportant dans la seconde :

$$y = \frac{eU}{mdv_1^2} x^2.$$

L'équation est celle d'une parabole tangente à $\vec{v_1}$, en C, s'incurvant vers le plateau négatif.

β) Écrivons que la parabole passe par E ($x_E = L$; $y_E = b$), nous en déduisons v_1 :

$$v_1 = \sqrt{\frac{eUL^2}{mdb}} = 7{,}6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

γ) • La particule α sort en E à la date $t = \frac{x_E}{v_1} = \frac{L}{v_1}$, les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_E}$ à cette date sont $\left(\dot{x}_E = v_1 ; \dot{y}_E = \frac{2eU}{md}\frac{L}{v_1} ; \dot{z}_E = 0\right)$.

Le module de $\overrightarrow{v_E}$ est alors $v_E = \sqrt{v_1^2 + \left(\frac{2eUL}{mdv_1}\right)^2} = 7{,}64 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

• Remarque : on pouvait déterminer v_E en appliquant le théorème de l'énergie cinétique, $\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{\vec{F}}$. Pour évaluer $W_{\vec{F}}$ on peut utiliser la formule $W_{\vec{F}} = q(V_C - V_E)$ mais il faut savoir calculer $V_C - V_E$ en fonction de U, d et $DE = b\left(V_C - V_E = U\frac{b}{d}\right)$. Il est préférable de calculer directement le travail de la force constante $\vec{F}$ (revoir ℳ 17) : $W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{CE}$, soit :

$$W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{CD} + \vec{F} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 + F \cdot b.$$

Par suite $\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F \cdot b$ avec $F = 2e\frac{U}{d}$, d'où :

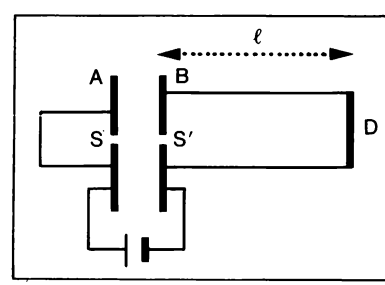
$$v_E = \sqrt{v_1^2 + \frac{4eUb}{md}} = 7{,}64 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

• Dans cette expérience, où le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire à la vitesse d'entrée $\overrightarrow{v_C}$, le champ électrique :

— fait peu varier la vitesse $\left(\text{la variation relative est } \frac{v_E - v_C}{v_E} \simeq 5{,}3 \cdot 10^{-3} \simeq 0{,}5\,\%\right)$: on dit que le champ électrique n'accélère pratiquement pas la particule α;

— fait dévier la particule α de façon appréciable.

E 60. *On ionise de l'hydrogène au voisinage d'une paire de plaques conductrices parallèles,* A *et* B, *entre lesquelles est appliquée une différence de potentiel* $V_A - V_B = U = 100$ V. *On laisse des ions* H^+ *entrer dans la zone comprise entre les plateaux par l'orifice* S, *percé dans* A. *Leur vitesse en* S *est pratiquement nulle.*
Dans le plateau B *un orifice* S' *(tel que* SS' *soit perpendiculaire aux plaques) est traversé par un certain nombre d'ions. Ces derniers pénètrent dans une chambre de longueur* $\ell = 0{,}5$ m *à l'intérieur de laquelle le champ électrique est nul. Ils parcourent cette distance* ℓ *pendant un intervalle de temps* $t = 3{,}6 \cdot 10^{-6}$ s *avant d'être détectés par le dispositif* D.



L'ensemble de l'appareil est placé dans une enceinte vide.
Déduire de cette expérience, après avoir décrit qualitativement son principe, la masse d'un ion H^+ *et celle d'une mole d'ions* H^+. *Le nombre d'Avogadro est* $\mathcal{N} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$.

(D'après bac)

S 60. Nous ne donnons que quelques indications :

- Principe de l'expérience :

— accélération des ions de S à S′ suivant un mouvement rectiligne car $\vec{v_S} \simeq \vec{0}$;
— « vol » des ions de S′ à D, mouvement pratiquement rectiligne et uniforme car « l'effet du poids » des ions est négligeable.

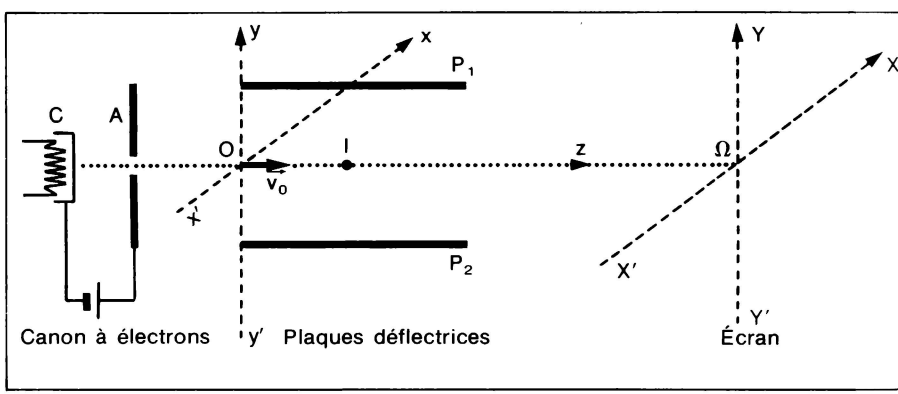
- Le « temps de vol » $t = \dfrac{\ell}{v_{S'}}$ d'où $v_{S'} = \dfrac{\ell}{t}$ (1).
- D'après le théorème de l'énergie cinétique $\dfrac{1}{2} m v_{S'}^2 = eU$ (2).
- Par suite, compte tenu de (1) et (2) $m = \dfrac{2eUt^2}{\ell^2}$.
- Numériquement $m = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg et la masse molaire :

$$M_{H^+} = \mathcal{N}m = 9{,}99 \cdot 10^{-4}\ kg \cdot mol^{-1} \simeq 1\ g \cdot mol^{-1}.$$

E 61. *On applique une tension* $U_{AC} = U_0$, *continue, entre la cathode* C *et l'anode* A *d'un canon à électrons. La vitesse de sortie des électrons* v_C, *émis par effet thermoélectrique de la cathode chauffée* C, *est pratiquement nulle.*

a) *A quelle vitesse* v_A *les électrons sortent-ils du canon à électrons ?*
La masse d'un électron est $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg ; $U_0 = 100$ V.

b) *Les électrons arrivent au point* O *avec le vecteur vitesse* $\vec{v_0}$ *colinéaire à* Oz, $\vec{v_0}$ *étant pratiquement égal à* $\vec{v_A}$. *Ils sont soumis sur une distance* $\ell = 0{,}1$ m *à l'action d'un champ électrique* $\vec{E}$ *uniforme créé par un condensateur plan dont les armatures* P_1 *et* P_2 *sont parallèles au plan* xOz, *symétriques par rapport à ce dernier et distantes de* $d = 0{,}05$ m.



α) *On établit une différence de potentiel* $V_{P_1} - V_{P_2} = u$. *Montrer que l'électron reste dans le plan* yOz, *déterminer l'équation de sa trajectoire entre* O *et* M, *point de sortie du condensateur.*

β) *Déterminer* u *sachant que* $y_M = -1{,}8$ cm.

γ) *Donner les caractéristiques du vecteur vitesse* $\vec{v}_M$ *au point* M, *montrer que le support du vecteur* $\vec{v}_M$, *représenté à partir de* M, *passe par le milieu* I *du condensateur* $\left(c'est\text{-}à\text{-}dire\ par\ le\ point\ situé\ sur\ Oz\ à\ la\ distance\ OI = \frac{\ell}{2}\right)$.

c) *A l'extérieur du condensateur le champ électrique est nul.*

α) *Quelle est le mouvement des électrons entre la fin du condensateur et l'écran d'observation rapporté aux axes* (ΩX, ΩY)?

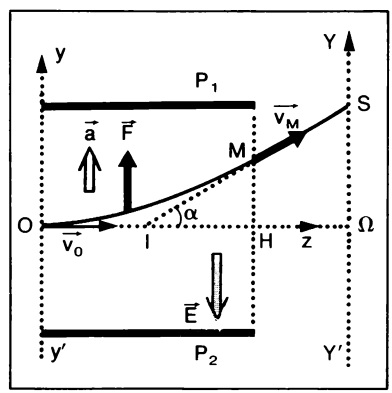
β) *Quelle est la déviation angulaire* α *des électrons? La calculer lorsque* u = 40 V.

γ) *Quelles sont les coordonnées du point d'impact* S *(initiale de spot) des électrons sur l'écran. Montrer que* Y_S *est proportionnel à* u.
La distance IΩ = D = 0,3 m.

S 61. *a*) Réponse : $\frac{1}{2} mv_A^2 = eU_0$, d'où $v_A = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = 5{,}96 \cdot 10^6\ m \cdot s^{-1}$.

b) α) • Présentation de la démarche : le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme; la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ est constante; nous allons découvrir que le vecteur accélération $\vec{a}$ a des coordonnées constantes pour une tension u donnée; par intégration de ces coordonnées nous déterminerons les lois du mouvement, puis la trajectoire.

• Le repère orthonormé (O, x, y, z), lié à l'appareil, donc à la Terre, est quasi galiléen.



• Le système est un électron de charge q = − e. Cet électron est soumis à la force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$ due au condensateur sous tension $V_{P_1} - V_{P_2} = u$, à son poids que nous négligerons devant $\vec{F}$.

• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{F} = m\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \frac{-e\vec{E}}{m}$.

Pour une tension u donnée, le vecteur $\vec{E}$ est le même en tous les points; perpendiculaires à P_1 et à P_2; donc parallèles à Oy; dirigé de P_1 vers P_2 si u est positif, de P_2 vers P_1 si u est négatif (sur la figure u est positif); de module $E = \frac{|u|}{d}$.

Par suite les coordonnées de $\vec{a}$ sont constantes, pour un u donné,

$$\vec{a} \begin{vmatrix} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{eu}{md} \\ \ddot{z} = 0 \end{vmatrix} \text{ (car u et } \ddot{y} \text{ sont de même signe)}$$

• L'état de mouvement initial, en prenant l'origine des dates à l'instant où l'électron passe par O est caractérisé par :
— le vecteur position initial nul ($x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0$);

— le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0} = \vec{v_A}$:

$$\vec{v_0} \left| \begin{array}{l} \dot{x}_0 = 0 \\ \dot{y}_0 = 0 \\ \dot{z}_0 = v_A. \end{array} \right.$$

• Par intégration des coordonnées de $\vec{a}$, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ à la date t :

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x} = C^{te} = \dot{x}_0 = 0 \\ \dot{y} = \dfrac{eu}{md} t + C^{te} = \dfrac{eu}{md} t \quad (\text{car } \dot{y}_0 = 0) \\ \dot{z} = C^{te} = \dot{z}_0 = v_A. \end{array} \right.$$

• Par intégration des coordonnées de $\vec{v}$, on obtient les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{ON}$, N désignant l'électron :

$$\overrightarrow{ON} \left| \begin{array}{l} x = C^{te} = x_0 = 0 \\ y = \dfrac{eut^2}{2md} + C^{te} = \dfrac{eut^2}{2md} \quad (\text{car } y_0 = 0) \\ z = v_A t + C^{te} = v_A t \quad (\text{car } z_0 = 0). \end{array} \right.$$

• L'électron reste dans le plan yOz puisque $x = 0$ quel que soit t.

• Pour obtenir l'équation de la trajectoire dans le plan yOz, on élimine t entre la 2e et 3e loi horaire :

$$t = \frac{z}{v_A}, \text{ d'où } y = \frac{eu}{2mv_A^2 d} z^2.$$

La trajectoire est un arc de parabole, tangent en O à $\vec{v_0}$, dirigé vers le plateau P_1 si $u > 0$, vers le plateau P_2 si $u < 0$.

β) Le point M a pour coordonnées $\left(x_M = 0;\ y_M = \dfrac{eu\ell^2}{2mv_A^2 d};\ z = \ell\right)$.

Si $y_M = -1{,}8 \cdot 10^{-2}$ m, $u = \dfrac{2mv_A^2 dy_M}{e\ell^2}$, c'est-à-dire puisque $mv_A^2 = 2eU_0$ (revoir a)) $u = \dfrac{4U_0 dy_M}{\ell^2}$. (Vérifier que la formule est bien homogène.) Numériquement $u = -36$ V.

γ) • Le point I a pour coordonnées :

$$I \left| \begin{array}{l} x_I = 0 \\ Y_I = 0 \\ z_I = \dfrac{\ell}{2}. \end{array} \right.$$

Compte tenu des coordonnées de M indiquées en β) :

$$\overrightarrow{IM} \left| \begin{array}{l} 0 \\ \dfrac{eu\ell^2}{2mv_A^2 d} \\ \dfrac{\ell}{2}. \end{array} \right.$$

• Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}$ a pour coordonnées, en remarquant que l'électron passe en M à la date $t=\frac{\ell}{v_A}$, :

$$\overrightarrow{v_M}\left|\begin{array}{l}0\\ \dfrac{eu\ell}{mdv_A}\\ v_A.\end{array}\right.$$

• En comparant les coordonnées de $\overrightarrow{IM}$ et celles de $\overrightarrow{v_M}$, on constate que :

$$\overrightarrow{IM}=\frac{\ell}{2v_A}\overrightarrow{v_M}.$$

Par suite $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{v_M}$ sont parallèles. Comme ils passent par le point M, leurs supports sont confondus. Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}$ a donc un support qui passe par I (nous dégagerons cette propriété dans $\mathcal{M}$ 27).

c) α) Entre M, point de sortie du condensateur, et S, spot sur l'écran, l'électron n'est soumis qu'à son poids. « L'effet du poids » est négligeable : l'électron est pratiquement en mouvement rectiligne et uniforme. La droite trajectoire MS est tangente en M à l'arc de parabole, elle passe par le point I.

β) La déviation angulaire α des électrons est l'angle $(\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_M})$, cet angle se retrouve en I dans le triangle rectangle IHM.

Dans ce triangle, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\overline{HM}}{IH}=\frac{y_M}{\frac{\ell}{2}}=\frac{eu\ell}{mv_A^2 d}$, comme $mv_A^2=2eU_0$ (revoir *a*)),

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{u\ell}{2U_0 d}$.

Numériquement pour $u=40$ V, $\operatorname{tg}\alpha=0{,}4$, $\alpha=21{,}8°=21°48'$.

γ) • L'électron reste dans le plan yOz, par suite le spot S est sur l'axe Y'Y : l'abscisse X_S du spot est nulle.

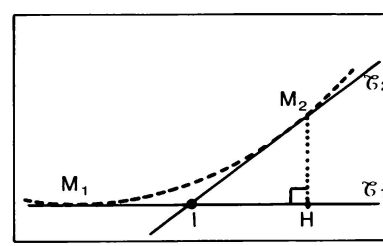
• Dans le triangle IΩS, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\overline{\Omega S}}{I\Omega}$. Par suite $Y_S=\overline{\Omega S}=D\operatorname{tg}\alpha=\frac{Du\ell}{2U_0 d}$.

Pour une tension accélératrice U_0 donnée, le coefficient $\frac{D\ell}{2U_0 d}=K$ est donné.

Alors $Y_S=Ku$: Y_S est proportionnel à u. (Remarquons que cette propriété a été admise en classe de Seconde pour définir la tension électrique à l'aide d'un oscillographe.)

$\mathcal{M}$ 27 **Propriété de la parabole.**

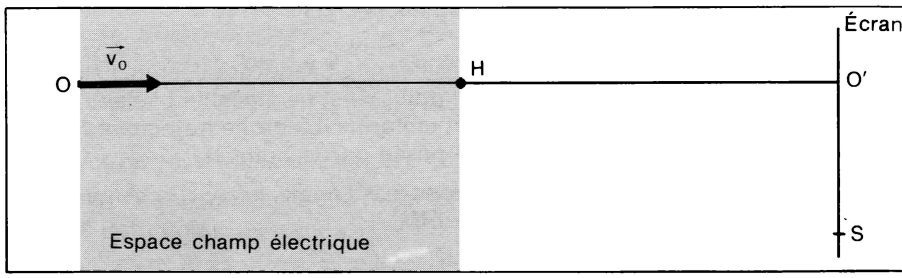
Dans l'exercice précédent nous avons démontré que la tangente en M passait par I milieu de OH, cette propriété de la parabole pourra être utilisée sans justification.



Énonçons-la :

— soit $\mathcal{C}_1$ la tangente en M_1 à l'arc de parabole;
— soit $\mathcal{C}_2$ la tangente en M_2;
— soit H la projection orthogonale de M_2 sur $\mathcal{C}_1$;
— la tangente $\mathcal{C}_2$ passe par le milieu I de M_1 H.

E 62. *Un électron traverse un espace champ électrostatique uniforme caractérisé par le vecteur* $\vec{E}$ *perpendiculaire à la vitesse d'entrée* $\vec{v_0}$. *L'espace champ est limité dans le plan de la figure par une zone rectangulaire (en gris), de largeur* OH *suivant* $\vec{v_0}$. *Un écran est situé perpendiculairement à* $\vec{v_0}$, *à la distance* HO' = OH = 5 cm. *L'ensemble est dans le vide. L'électron frappe l'écran en* S *tel que* O'S = 2 cm.



a) *Tracer, en la justifiant très rapidement, la trajectoire de l'électron de* O *à* S. *Dessiner un représentant du vecteur champ électrique* $\vec{E}$.

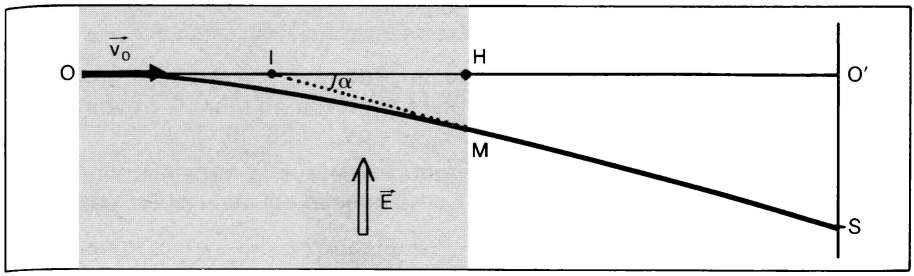
b) *Quelle est la déviation angulaire* α *de l'électron?*

c) *Quelle est la déviation linéaire* d *de l'électron en bout de champ?*

S 62. *a*) • Dans un repère quasi galiléen lié au dispositif, le vecteur accélération de l'électron est constant, non nul, pendant la traversée de l'espace champ électrostatique $\left(\text{il est égal à } \frac{-e\vec{E}}{m}\right)$. Comme $\vec{v_0}$ n'est pas parallèle à $\vec{E}$ (il lui est perpendiculaire), la trajectoire est alors un arc de parabole OM tangent à $\vec{v_0}$ en O.
Après M, point de sortie de l'espace champ électrique, « l'effet du poids » de l'électron est négligeable : le mouvement est pratiquement rectiligne et uniforme. La droite MS, d'après une propriété de la parabole (revoir *M* 27) passe par le milieu I de OH.
La trajectoire globale OMS est contenue dans le plan passant par O et S et contenant $\vec{v_0}$ tracé à partir de O : donc dans le plan de la figure. (Le plan de la trajectoire est de plus parallèle au champ $\vec{E}$, nous y reviendrons pour déterminer $\vec{E}$).

• D'où la façon de tracer la trajectoire :
— on détermine I, milieu de OH;
— on trace la droite IS qui coupe la frontière de sortie de l'espace champ électrique en M;

— on trace l'arc de parabole OM, tangent en O à $\vec{v_0}$ et en M à MS.



• Le vecteur champ électrique $\vec{E}$ est parallèle au plan de la trajectoire, on peut choisir un représentant dans le plan de la trajectoire. Ce représentant doit être de plus perpendiculaire à $\vec{v_0}$ d'après l'énoncé. Son sens est de M vers H, car la force $\vec{F} = -e\vec{E}$ est dirigée de H vers M.

b) La déviation angulaire α est l'angle entre $\vec{v_0}$ et $\vec{v_M}$, cet angle n'est autre que l'angle I du triangle rectangle IO'S.

D'où $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{O'S}{IO'} = \dfrac{2 \cdot 10^{-2}}{7{,}5 \cdot 10^{-2}} = 0{,}267$ et $\alpha = 14{,}9°$.

c) La déviation linéaire $d = HM$ s'évalue facilement dans le triangle rectangle IHM : $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{HM}{IH}$, d'où $HM = d = IH \cdot \text{tg}\,\alpha = 6{,}67 \cdot 10^{-3}$ m.

E 63. *Un proton (masse* $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, *charge* $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C*), se déplace dans un espace champ électrique uniforme. Il passe d'un point* A *à un point* B. *Le poids du proton est négligeable devant la force électrique.*

a) *Quelles sont les trajectoires possibles menant le proton de* A *à* B *? Dans quel cas le mouvement est-il uniformément varié?*

b) *En* A *le potentiel électrique est* $V_A = 400$ V *par rapport à un certain point de référence* R. *En* B *le potentiel électrique est* $V_B = 100$ V, *toujours par rapport au point* R.

α) *Quelle est l'énergie potentielle électrique du proton en* A? *en* B?

β) *Par conservation de l'énergie, en déduire la vitesse du proton en* B, *la vitesse* v_A *étant égale à* 10^5 m·s^{-1}.

S 63. *a*) • Dans un espace champ électrique uniforme, une particule chargée, uniquement soumise à la force électrique, peut avoir deux trajectoires la conduisant de A à B :
— une trajectoire rectiligne si le vecteur vitesse $\vec{v_A}$ est nul ou bien s'il est parallèle à $\vec{E}$;
— une trajectoire parabolique si $\vec{v_A}$ n'est pas parallèle à $\vec{E}$, le plan de la parabole étant parallèle à $\vec{v_A}$ et à $\vec{E}$.

• Par rapport au repère laboratoire quasi galiléen, le proton a un vecteur accélération $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{e\vec{E}}{m}$ constant. Si le mouvement est rectiligne, il est de plus

uniformément varié, sa loi horaire suivant la droite orientée AB est du type $x = \overline{AM} = \frac{1}{2}\bar{a}\,t^2 + \overline{v_A}\,t$ (M désignant le proton, l'origine des dates étant l'instant de passage en A).

b) α) Dans l'espace champ électrique le proton a une énergie potentielle électrique $E_p = qV$, l'état de référence étant le proton au point R (revoir ℳ 25). En A, $E_{p,A} = qV_A = 6{,}4 \cdot 10^{-17}$ J. En B, $E_{p,B} = qV_B = 1{,}6 \cdot 10^{-17}$ J.

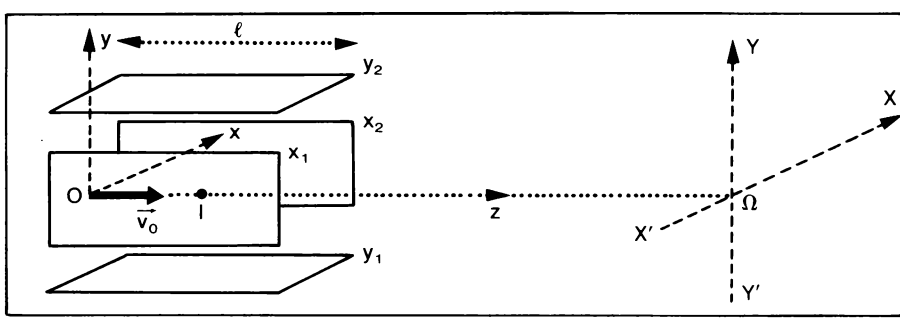
β) Le proton n'étant soumis a aucune autre force que la force électrique (son poids est négligé), son énergie $E = E_p + E_c$ reste constante. En particulier $qV_A + E_{C,A} = qV_B + E_{C,B}$ (1).

Comme $E_{C,A} = \frac{1}{2}mv_A^2$ et $E_{C,B} = \frac{1}{2}mv_B^2$, on en déduit facilement

$$v_B = \sqrt{\frac{2q}{m}(V_A - V_B) + v_A^2} = 2{,}6 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

(v_B est bien inférieur à $\frac{c}{10}$, l'expression de $E_{C,B}$ est donc correcte).

E 64. *Des électrons sortent d'un canon à électrons avec le même vecteur vitesse* $\vec{v_0}$ *(on dit qu'ils constituent un faisceau homocinétique). Ce vecteur* $\vec{v_0}$ *est parallèle à l'axe* Oz, *de même sens, son module est* $v_0 = 8 \cdot 10^6$ m·s^{-1}.
Ces électrons pénètrent en O *entre deux jeux de plaques :*
— *les plaques* y_1 *et* y_2, *horizontales, parallèles au plan* xOz, *distantes de* d = 2 cm, *de longueur* $\ell = 6$ cm, *équidistantes de* O;
— *les plaques* x_1 *et* x_2, *verticales, parallèles au plan* yOz, *distantes de* d = 2 cm, *de longueur* $\ell = 6$ cm, *équidistantes de* O.
L'écran de l'appareil est parallèle au plan xOy, *il est situé à la distance* D = 50 cm *du centre* I *des deux condensateurs. Il est muni de deux axes* ΩX *et* ΩY *parallèles respectivement à* Ox *et* Oy *et de même sens.*



a) $u_x = V_{x_2} - V_{x_1} = 0$; $u_y = V_{y_2} - V_{y_1}$ *est constant, non nul.*

α) *Quelles sont les coordonnées* X *et* Y *du spot sur l'écran exprimées éventuellement en fonction de* u_y? *La masse d'un électron est* $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

β) *Quelle valeur maximale* u_y *ne doit-il pas dépasser pour que les électrons puissent atteindre l'écran dont on supposera les dimensions suffisantes pour n'introduire aucune limitation?*

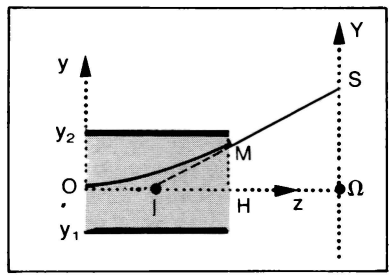
b) *Maintenant* $u_y = 10 \sin 100\,\pi t$, *fonction de période* $T = 2 \cdot 10^{-2}$ s. *Montrer que le temps de passage des électrons dans le condensateur* (y_1, y_2) *est négligeable devant la période de* u_y. *Conclure. Quel est l'aspect de l'écran?*

c) *Expliquer qualitativement comment visualiser la courbe représentant* u_y *en fonction du temps.*

d) $u_x = 10 \cos 100\,\pi t$ *et* $u_y = 10 \sin 100\,\pi t$, *quel est l'aspect de l'écran?*

S 64. *a)* α) (Solution très abrégée, revoir le 61).

• En intégrant les coordonnées du vecteur constant $\vec{a} = \dfrac{-e\vec{E}}{m}$, on déterminera les lois horaires du mouvement de l'électron dans le condensateur (y_1, y_2), le seul jouant un rôle dans cette expérience.
On trouvera :



$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{e u_y z^2}{2 m v_0^2 d} \\ z = v_0 t \end{array} \right.$$

• Les coordonnées de M, point de sortie du condensateur, sont :

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{e u_y \ell^2}{2 m v_0^2 d} = \overline{HM} \\ z = \ell \end{array} \right.$$

• Après le condensateur, « l'effet du poids » est négligeable, la trajectoire est rectiligne, elle passe par I, milieu de OH.
Les coordonnées du spot sont $X = 0$ et $Y = \overline{\Omega S}$.
Les triangles IHM et IΩS sont homothétiques, d'où :

$$\frac{\overline{\Omega S}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{I\Omega}}{\overline{IH}}.$$

Par suite $Y = \overline{\Omega S} = \dfrac{\overline{HM} \cdot D}{\dfrac{\ell}{2}} = \dfrac{e u_y \ell D}{m v_0^2 d} = 4{,}17 \cdot 10^{-3}\, u_y$ (SI).

β) Il faut que $HM < \dfrac{d}{2}$ pour que les électrons puissent sortir du condensateur, soit :

$$\frac{e u_y \ell^2}{2 m v_0^2 d} < \frac{d}{2}$$

$$u_y < \frac{m v_0^2 d^2}{e \ell^2} = 40 \text{ V}.$$

La valeur maximale de u_y est donc 40 V.

b) • Pour passer de O à M, un électron met le temps $t = \frac{\ell}{v_0}$ (on écrit que $z = \ell$ dans la troisième loi horaire). Numériquement $t = 7{,}5 \cdot 10^{-9}$ s. Ce temps est très inférieur à la période T de u_y.

• La théorie développée en α) suppose que u_y reste constante pendant que l'électron considéré traverse le condensateur. Etant donné que t est très inférieur à T, pendant la traversée, u_y ne change pratiquement pas. Le résultat $Y = 4{,}17 \cdot 10^{-3}\, u_y$ reste donc valable pour chaque électron.
Comme $u_y = 10 \sin 100\,\pi t$, l'ordonnée du spot $Y = 4{,}17 \cdot 10^{-2} \sin 100\,\pi t$. Le spot se déplace sur l'axe Y'ΩY, oscillant entre les points d'ordonnées $+4{,}17$ cm et $-4{,}17$ cm. Le mouvement étant rapide, l'écran reste lumineux suivant la trajectoire du spot : on observe donc un segment de droite vertical, de centre Ω, de longueur 8,34 cm.

c) Pour visualiser la courbe u_y en fonction du temps il est nécessaire d'appliquer une tension u_x, aux bornes des plaques verticales, dite « tension en dent de scie ». Cette tension communique au spot un mouvement horizontal uniforme de gauche à droite avec un retour quasi instantané droite vers gauche. On dit qu'on réalise un balayage.

d) • La tension $u_y = 10 \sin 100\,\pi t$ seule, donne au spot un mouvement tel que $X = 0$ et $Y = 4{,}17 \cdot 10^{-2} \sin 100\,\pi t$.

• La tension $u_x = 10 \cos 100\,\pi t$ seule, donne au spot un mouvement tel que $Y = 0$ et $X = 4{,}17 \cdot 10^{-3}\, u_x = 4{,}17 \cdot 10^{-2} \cos 100\,\pi t$: le coefficient est encore $4{,}17 \cdot 10^{-3}$ car le condensateur (x_1, x_2) est identique au condensateur (y_1, y_2) et a même centre I.

• Nous admettrons que sous l'action des deux tensions, le spot a pour coordonnées :

$$\begin{cases} X = 4{,}17 \cdot 10^{-2} \cos 100\,\pi t \\ Y = 4{,}17 \cdot 10^{-2} \sin 100\,\pi t. \end{cases}$$

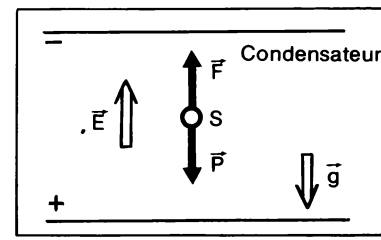
• Pour obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire décrite par le spot, donc de la courbe visualisée sur l'écran, il suffit d'éliminer le temps entre X et Y. Pour cela on exprime $\cos 100\,\pi t$ et $\sin 100\,\pi t$ et on reporte dans $\cos^2 100\,\pi t + \sin^2 100\,\pi t = 1$.
On obtient $\cos 100\,\pi t = \frac{X}{4{,}17 \cdot 10^{-2}}$, $\sin 100\,\pi t = \frac{Y}{4{,}17 \cdot 10^{-2}}$,
puis $\frac{X^2}{(4{,}17 \cdot 10^{-2})^2} + \frac{Y^2}{(4{,}17 \cdot 10^{-2})^2} = 1$.
Soit $X^2 + Y^2 = (4{,}17 \cdot 10^{-2})^2$. Cette équation est celle d'un cercle de centre Ω, de rayon $R = 4{,}17 \cdot 10^{-2}$ m $= 4{,}17$ cm.

E 65. *(Dans les problèmes précédents les corps chargés étaient des électrons, des protons des ions de charge massique* $\frac{q}{m}$ *suffisamment grande pour qu'on puisse négliger leur poids devant la force électrique. Lorsque le corps chargé est une petite boule, une goutte de liquide..., il n'est plus possible de faire cette approximation, c'est ce que nous allons découvrir dans* E 65 *et* E 66).

a) *Une sphère S, pratiquement ponctuelle, de masse* $m = 0{,}4$ g, *porte la charge électrique* q. *Elle est en équilibre en un point* O *d'un espace champ électrique uniforme créé par un condensateur plan, le point* O *n'étant pas sur les plaques du condensateur. Le vecteur* $\vec{E}$ *caractérisant le champ est vertical, orienté vers le haut, de module* $E = 4 \cdot 10^4\ V \cdot m^{-1}$.
Quelle est la charge q *portée par la sphère?*
L'intensité du champ de pesanteur est $g = 9{,}8\ N \cdot kg^{-1}$.

b) A *la date* $t = 0$, *on tourne le condensateur : le vecteur* $\vec{E}$ *devient instantanément horizontal en gardant le même module.*
La sphère S *se met en mouvement, quelle est sa trajectoire? Quelle est la nature du son mouvement? Quel temps met-elle pour descendre de* 10 *cm? (Elle ne rencontre pas les plaques du condensateur).*

S 65. *a*) • Le système est la sphère S.

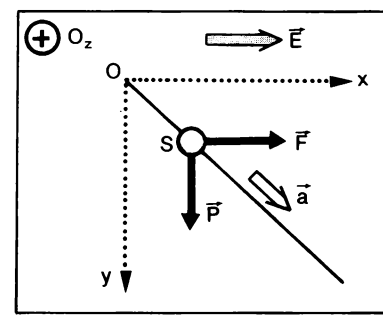


• Par rapport au condensateur lié à la Terre, donc repère quasi galiléen, la sphère est en équilibre sous l'action de la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ due au condensateur est à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dû à la Terre.

• Par suite $\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$: la force $\vec{F}$ est donc dirigée vers le haut, comme $\vec{E}$, la charge q est donc positive.

• En module $q = \dfrac{mg}{E} = 9{,}8 \cdot 10^{-8}\ C = 98$ nC (revoir ℳ 26).

b) • Le système est la sphère S.



• Par rapport au condensateur lié à la Terre dans sa nouvelle position, donc repère quasi galiléen, la sphère a le vecteur accélération $\vec{a}$ que nous allons déterminer en appliquant le théorème du centre d'inertie.

• La sphère est soumise à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$, horizontale, de même sens que $\vec{E}$ puisque $q > 0$; à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, vertical, vers le bas.

• Par suite $\vec{F} + \vec{P} = m\vec{a}$.

• Suivant Ox : $\overline{F_x} + \overline{P_x} = m\overline{a_x} = m\ddot{x}$, d'où

$$qE = m\ddot{x} \text{ et } \dot{x} = \frac{qE}{m}$$

• Suivant Oy : $\overline{F_y} + \overline{P_y} = m\overline{a_y} = m\ddot{y}$, d'où

$$mg = m\ddot{y} \text{ et } \dot{y} = g$$

• Suivant Oz, perpendiculaire au plan de la figure, $\overline{F_z} + \overline{P_z} = m\overline{a_z} = m\ddot{z}$ d'où $\ddot{z} = 0$.

• L'état de mouvement initial est caractérisé par :
— le vecteur position initiale nul ($x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0$);

— le vecteur vitesse initiale nul puisque S part de O à vitesse nulle ($\dot{x}_0 = 0$; $\dot{y}_0 = 0$; $\dot{z}_0 = 0$).

• En intégrant les coordonnées de $\vec{a}$, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse à la date t :

$$\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{qE}{m} t + C^{te} = \dfrac{qE}{m} t \text{ (puisque } \dot{x}_0 = 0) \\ \dot{y} = gt + C^{te} = gt \quad \text{(puisque } \dot{y}_0 = 0) \\ \dot{z} = C^{te} = \dot{z}_0 = 0 \end{cases}$$

• En intégrant les coordonnées de $\vec{v}$, on obtient les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OS}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{qE}{2m} t^2 \text{ (en remarquant que } x_0 = 0) \\ y = \dfrac{g}{2} t^2 \ (y_0 = 0) \\ z = z_0 = 0. \end{cases}$$

• La sphère S reste dans le plan de la figure, $z = 0$. L'équation cartésienne de sa trajectoire s'obtient en éliminant t entre x et y :

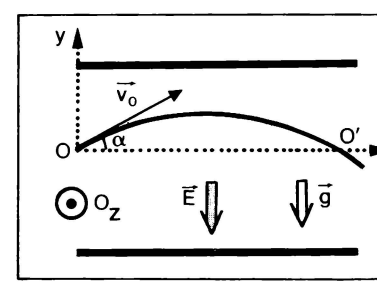
$$t^2 = \frac{2m}{qE} x, \text{ d'où } y = \frac{g}{2} \cdot \frac{2m}{qE} x = \frac{gm}{qE} x.$$

Ceci est l'équation d'une droite linéaire de coefficient directeur $\dfrac{gm}{qE} = 1$.

• Le vecteur $\vec{a}$ étant constant et le mouvement étant rectiligne, le mouvement est uniformément varié.

• Pour descendre de 10 cm, la sphère d'après la deuxième loi horaire, met le temps $t = \sqrt{\dfrac{2y}{g}} = 0{,}143$ s.

E 66. *(Problème un peu plus difficile, synthèse entre le chapitre 4 et le chapitre 5).*
Une petite boule, électrisée de masse $m = 1$ g, *porte la charge* $q = +10^{-6}$ C. *Elle est lancée dans un espace champ électrique uniforme (caractérisé par* $\vec{E}$, *vertical, vers le bas, de module* E*) et champ de pesanteur uniforme (caractérisé par* $\vec{g}$, *vertical, vers le bas, de module* $g = 10\ m \cdot s^{-2}$*). Elle passe en* O, *point origine du repère* (O, x, y, z), *à la date* $t = 0$, *avec le vecteur vitesse* $\vec{v_0}$, *de module* $v_0 = 2\ m \cdot s^{-1}$, *incliné de* $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{v_0}) = \alpha = 30°$.



a) *Etablir l'équation de la trajectoire de la boule.*

b) *Pour quelle valeur de* E, *la boule coupe t-elle l'axe des* x *au point* O' *d'abscisse* $OO' = \ell = 0{,}2$ m?

S 66. (Nous ne donnons que des indications et les réponses.)

a) Les lois horaires :

$$x = v_0 \cos \alpha t$$
$$y = -\left(g + \frac{qE}{m}\right)\frac{t^2}{2} + v_0 (\sin \alpha) t$$
$$z = 0.$$

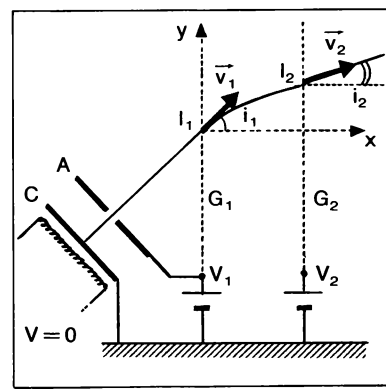
Conduisent à l'équation cartésienne :

$$y = -\left(g + \frac{qE}{m}\right)\frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

b) On écrit que pour $y = 0$, $x = \ell$, d'où :

$$g + \frac{qE}{m} = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\ell}$$
$$\frac{qE}{m} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha - g\ell}{\ell} \quad \text{car } 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$$
$$E = \frac{m}{q} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\alpha - g\ell}{\ell} = 7\,320 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

E 67. *Le dispositif ci-contre est placé dans le vide.*
La cathode C, *émettant des électrons à vitesse négligeable, l'anode* A, *les grilles* G_1 *et* G_2 *sont planes, verticales.* A *et* C *sont parallèles,* G_1 *et* G_2 *sont parallèles et font l'angle* α *avec* A *et* C.
Le potentiel de C *est pris égal à zéro;* A *et* G_1 *sont au même potentiel* $V_1 > 0$, *de ce fait le champ électrique est nul entre* A *et* G_1; G_2 *est au potentiel positif* V_2 *réglable. Le champ électrique est nul après* G_2.



a) *Les électrons traversent* G_1 *avec le vecteur vitesse* $\vec{v_1}$ *incliné de* i_1 *par rapport à l'axe* $I_1 x$ *perpendiculaire aux grilles.*

α) *Quelle est la relation entre* i_1 *et* α?

β) *Quelle est la relation entre* v_1 *et* V_1?

b) *Quelle est l'équation de la trajectoire des électrons entre* G_1 *et* G_2 *dans le repère* (I_1, x, y)?

c) *Quelle condition doit satisfaire* $(V_2 - V_1)$ *si l'on veut que les électrons atteignent* G_2, *la distance* d *séparant* G_1 *de* G_2 *joue-t-elle un rôle dans cette condition?*

d) *On suppose la condition précédente satisfaite, les électrons passent à travers* G_2 *à la vitesse* $\vec{v_2}$ *faisant l'angle* i_2 *avec* $I_1 x$.
Quelle est la relation entre v_1, v_2, i_1 *et* i_2? *Quelle est la relation entre* V_1, V_2, i_1 *et* i_2?

S 67. (Nous ne développons pas tous les calculs.)

a) • Les électrons, partant à vitesse nulle de C, ont un mouvement rectiligne uniformément accéléré entre C et A : leur trajectoire est perpendiculaire à A et à C, leur vitesse de passage en A est $v_A = \sqrt{\frac{2eV_1}{m}}$.

• Entre A et G_1, l'effet du poids des électrons étant négligeable, le mouvement est rectiligne et uniforme, par suite :

α) le vecteur vitesse $\vec{v_1}$ est perpendiculaire à A, donc $i_1 = \alpha$;

β) $v_1 = v_A = \sqrt{\frac{2eV_1}{m}}$.

b) • D'après $-e\vec{E} = m\vec{a}$, on trouvera :

— d'une part $\ddot{x} = \frac{e(V_2 - V_1)}{md}$ (en remarquant que $\ddot{x} > 0$ si $V_2 > V_1$, cas de la figure), par intégration :

$$x = \frac{e(V_2 - V_1)}{2md} t^2 + v_1 \cos i_1 t; \qquad (1)$$

— d'autre part $\ddot{y} = 0$, donc :

$$y = v_1 \sin i_1 t. \qquad (2)$$

• En éliminant t entre (1) et (2), on obtient l'équation de la trajectoire :

$$x = \frac{e(V_2 - V_1)}{2md v_1^2 \sin^2 i_1} y^2 + y \frac{\cos i_1}{\sin i_1}; \qquad (3)$$

c'est un arc de parabole tangent en I_1 à $\vec{v_1}$.

c) Les électrons rencontrent la grille G_2 lorsqu'en donnant à x la valeur d dans l'équation (3) l'équation du second degré en y admet des racines, donc si son discriminant $\Delta \geqslant 0$.

Ordonnons cette équation en y :

$$\frac{e(V_2 - V_1)}{2mdv_1^2 \sin^2 i_1} y^2 + \frac{\cos i_1}{\sin i_1} y - d = 0$$

$$\Delta = \frac{\cos^2 i_1}{\sin^2 i_1} + \frac{2e(V_2 - V_1)d}{mdv_1^2 \sin^2 i_1} \geqslant 0.$$

On constate que la distance d, non nulle, n'intervient pas dans la condition puisqu'on peut simplifier par d.

Finalement $(V_2 - V_1) \geqslant \frac{-mv_1^2}{2e} \cos^2 i_1$, or $\frac{mv_1^2}{2e} = V_1$,

d'où $(V_2 - V_1) \geqslant -V_1 \cos^2 i_1$.

d) • Suivant Oy, $\ddot{y} = 0$, donc $\dot{y} = C^{te}$.

En particulier :

— en I_1, $\dot{y}_1 = v_1 \sin i_1$;

— en I_2, $\dot{y}_2 = v_2 \sin i_2$;

— d'où $v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2$.

• $v_1 = \sqrt{\frac{2eV_1}{m}}$, on démontrera que $v_2 = \sqrt{\frac{2eV_2}{m}}$ (application du théorème de l'énergie cinétique entre C et I_2).

Par suite : $\sqrt{V_1} \sin i_1 = \sqrt{V_2} \sin i_2$ (remarquons que cette loi ressemble à la « loi des sinus » intervenant dans les lois de la réfraction des ondes).

• *Remarque :* $\sin i_2 = \frac{\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_2}} \sin i_1$. L'angle i_2 n'existe que si $\frac{\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_2}} \sin i_1 \leqslant 1$, donc si $V_2 \geqslant V_1 \sin^2 i_1$. Cette condition est équivalente à $(V_2 - V_1) \geqslant -V_1 \cos^2 i_1$ qui s'écrit $V_2 \geqslant V_1(1 - \cos^2 i_1^2) = V_1 \sin^2 i_1$.

POURQUOI ?

• *Vous dites dans les corrections « l'effet du poids de l'électron est négligeable », pourquoi ne pas dire simplement « le poids de l'électron est négligeable »?*

En physique lorsqu'on dit « négligeable » c'est que l'on compare à une autre quantité de même nature : ainsi on peut négliger la masse d'un électron devant celle d'un atome, on peut négliger la vitesse de sortie d'un électron de la cathode devant la vitesse acquise au passage par l'anode, ... On ne peut donc négliger le poids de l'électron que devant une autre force s'exerçant sur l'électron. Cela n'est pas possible lorsque l'électron chemine dans un espace uniquement champ de pesanteur, mais c'est possible lorsque l'électron chemine dans un espace à la fois champ de pesanteur et champ électrique (ou champ magnétique, nous allons le voir dans la prochaine leçon).

• *Pourquoi les dispositifs sont-ils placés dans le vide?*

On fait le vide pour qu'il n'y ait pas de chocs entre les particules chargées dont on étudie le mouvement et les molécules de l'air. Le vide d'ailleurs n'est pas absolu (c'est impossible à faire), la pression de remplissage du tube est suffisamment faible pour que la probabilité de rencontre entre les projectiles étudiés et les molécules restantes soit négligeable.
(Attention aux idées fausses : on ne fait pas le vide pour annuler le poids des particules, le poids est une force d'attraction due à la Terre qui reste inchangée qu'on fasse ou ne fasse pas le vide.)

• *Lorsqu'on étudie le mouvement d'un faisceau d'électrons, je ne sais pas exactement quel système prendre.*

On prend comme système un électron du faisceau et non pas le faisceau tout entier (ce qui constituerait un système mal défini). On étudie donc le mouvement d'un électron particulier.
Si le faisceau d'entrée est homocinétique (c'est-à-dire si tous les électrons ont même vecteur vitesse) et si le réglage du dispositif ne change pas (tensions accélératrice et déflectrice inchangées) tous les électrons ont le même mouvement que celui de l'électron étudié : par extension on dit que c'est le mouvement du faisceau d'électrons.

• *J'ai lu dans une revue qu'à la place des champs électriques on utilisait souvent des champs magnétiques, est-ce vrai?*

• Rappelons d'abord les deux rôles essentiels joués par un champ électrique $\vec{E}$:
① $\vec{E}$ accélère les particules chargées (dans ce cas le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$ est nul ou parallèle à $\vec{E}$);
② $\vec{E}$ dévie les particules chargées sans pratiquement les accélérer (le mot « accélérer » signifiant « modifier la vitesse » et non pas « donner un vecteur accélération », revoir E 59).

• Dans le rôle ① $\vec{E}$ ne peut pas être remplacé par un champ magnétique qui, nous allons le voir, n'accélère jamais une particule chargée; dans le rôle ②, $\vec{E}$ peut être avantageusement remplacé par un champ magnétique $\vec{B}$.

6 LES CONDENSATEURS

E 68. *(Charge d'un condensateur par un générateur de tension continue.) Un condensateur* AB *est constitué par deux bandes d'aluminium de largeur* $\ell = 6$ cm, *de longueur* $L = 200$ cm, *séparées par du papier paraffiné d'épaisseur* $d = 0{,}4$ mm. *La permittivité relative du diélectrique est* $\varepsilon_r = 2{,}4$.

a) *Quelle est la capacité de ce condensateur?*

b) *Ce condensateur, initialement neutre est relié, à la date* $t = 0$, *à un générateur de tension continue de f.é.m.* $E = 12$ V, *de résistance interne* $r = 2\ \Omega$. *(L'armature* A *est reliée au pôle + du générateur.)*

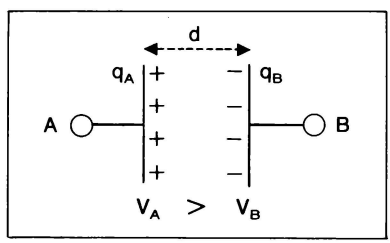
α) *Indiquer sur un schéma dans quel sens chemine le courant de charge.*

β) *Quelle est l'intensité* I_0 *de ce courant à la date* $t = 0$?

γ) *Au bout d'un temps très court, le courant s'annule, quelle est alors la tension algébrique* $u_{AB} = V_A - V_B$?

δ) *Quelles sont alors les charges des armatures* A *et* B?

28 Capacité et charge d'un condensateur.



• Un condensateur est constitué par deux conducteurs appelés armatures, séparés par un isolant encore appelé diélectrique.

• Les armatures A et B d'un condensateur sous tension prennent des charges q_A et q_B opposées :

$$q_A = C(V_A - V_B) = CU_{AB}$$
$$q_B = -q_A$$
$C > 0$: capacité du condensateur.

Si les charges sont exprimées en coulombs (C), les tensions en volts (V), la capacité s'exprime en farad (F).

• La valeur absolue $|q| = |q_A| = |q_B|$ s'appelle la charge du condensateur.

• Si les deux armatures sont séparées par une épaisseur d'isolant constante, d, le condensateur est dit plan. Sa capacité est donnée par l'expression :

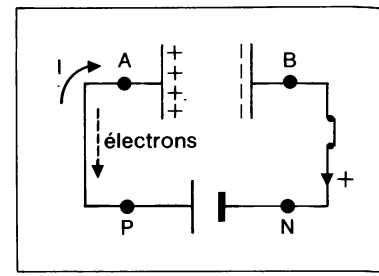
$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

La constante ε_0 s'appelle la permittivité du vide :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ S.I.}$$

La constante ε_r est la permittivité relative de l'isolant (pour l'air il faut savoir que $\varepsilon_r \simeq 1$).
La surface S est l'aire commune aux deux parties d'armature en regard.

S 68. *a*) • L'épaisseur de l'isolant étant constante, le condensateur est plan, sa capacité :



$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

avec $S = \ell \times L = 0{,}12\ m^2$
$\varepsilon_r = 2{,}4$
$d = 4 \cdot 10^{-4}\ m$
$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi \cdot 10^9}$

par suite $C = \dfrac{2{,}4 \times 0{,}12}{36\pi \cdot 10^9 \times 4 \cdot 10^{-4}} = 6{,}37 \cdot 10^{-9}\ F = 6{,}37\ nF$ (revoir les sous-multiples dans ℳ 26).

b) α) La borne + du générateur attire les électrons : un déficit électronique se localise, par effet de condensation avec la plaque en regard, sur la face interne de l'armature A qui se charge ainsi positivement. Le courant de charge va donc de P vers A à l'extérieur du condensateur.

Remarques :
— Inversement la borne − du générateur repousse les électrons, un excès d'électrons se localise sur la face interne de l'armature B.
— Aucun électron ne traverse le diélectrique entre A et B.

β) A la date $t = 0$, le condensateur est encore neutre : $(V_A - V_B)_0 = 0$, par suite, puisque $V_A = V_P$ et $V_B = V_N$, $(V_P - V_N)_0 = 0$.
Appliquons la loi d'Ohm au générateur PN, en prenant comme sens + le sens du courant de charge (revoir ℳ 53) :
— le sens + entrant par N, sortant par P, la tension à considérer est $V_N - V_P$;
— le générateur ayant tendance à envoyer un courant dans le sens +, sa f.é.m. algébrique $e = +E$;
— le courant cheminant dans le sens +, $i_0 = +I_0$;
— d'après la loi d'Ohm $(V_N - V_P)_0 = ri_0 - e = rI_0 - E$. (1)
Comme $(V_P - V_N)_0 = 0$, d'après (1) $I_0 = \dfrac{E}{r} = 6\ A$.

γ) En fin de charge, $i = 0$, donc $(V_N - V_P) = ri - e = -e = -E$.
Par suite comme $V_N = V_B$ et $V_P = V_A$, $(V_B - V_A) = -E$: la tension algébrique $u_{AB} = V_A - V_B = E = 12\ V$.

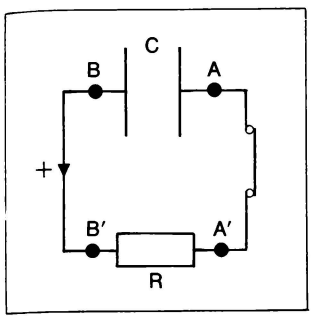
δ) • La charge de l'armature A est $q_A = C(V_A - V_B) = 6{,}37 \cdot 10^{-9} \times 12 = 7{,}64 \cdot 10^{-8}$ C; la charge de l'armature B est $q_B = -q_A = -7{,}64 \cdot 10^{-8}$ C.

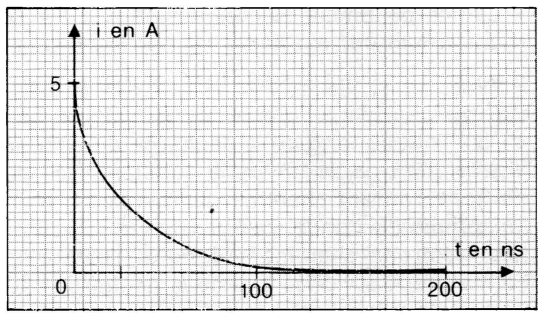
E 69. *(Décharge d'un condensateur dans un résistor.) Un condensateur* AB *est formé par deux disques métalliques, de même axe, de même rayon* $R = 10$ cm, *séparés par une couche d'air d'épaisseur* $d = 0{,}5$ mm.

a) *Quelle est sa capacité* C?

b) *Initialement le condensateur est chargé. Quelle est sa charge sachant que le champ électrique à l'intérieur du condensateur est* $E_0 = 5 \cdot 10^5\ V \cdot m^{-1}$.

c) *A la date* $t = 0$ *on relie les deux armatures* A *et* B *à un résistor de résistance* R. *L'intensité du courant de décharge mesurée algébriquement suivant le sens + indiqué, varie en fonction du temps : voir le graphique ci-dessous.*





α) *Quel est le sens du courant de décharge, en déduire quelle est l'armature,* A *ou* B, *qui était initialement chargée positivement?*

β) *Quelle est la résistance du résistor? (considérer l'intensité initiale de décharge).*

γ) *Quelle est la quantité d'électricité qui traverse le résistor?*

δ) *Quelle est la puissance calorifique moyenne dissipée par effet Joule au cours de cette décharge? Conclure.*

29 **Énergie emmagasinée dans un condensateur.**

Désignons par U la valeur absolue de la tension existant entre les deux armatures, par $|q|$ la valeur absolue de la charge d'une armature. Le condensateur ainsi chargé possède en réserve l'énergie électrique :

$$W_{él} = \frac{1}{2}|q|\,U = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

Cette énergie est en général faible, cependant la puissance dissipée à la décharge très rapide peut être grande.

S 69. a) Le condensateur a un isolant, l'air, d'épaisseur constante : c'est un condensateur plan. Sa capacité est $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d}$.

L'isolant étant de l'air, la permittivité relative $\varepsilon_r \simeq 1$.
La surface S est celle de l'un des disques : $S = \pi R^2$.

Par suite $C = \dfrac{\pi R^2}{36\pi \cdot 10^9 \times d} = \dfrac{R^2}{36 \cdot 10^9 d} = 5{,}56 \cdot 10^{-10}$ F $= 556$ pF (voir $\mathcal{M}$ 26).

b) • A l'intérieur d'un condensateur plan, le champ électrique est uniforme (revoir $\mathcal{M}$ 25) de module $E_0 = \dfrac{U_0}{d}$, en désignant par U_0 la valeur absolue de la tension initiale existant entre les armatures.
Par suite $U_0 = E_0 d = 5 \cdot 10^5 \times 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 250$ V.

• La charge initiale du condensateur $|q_0|$ (égale à la valeur absolue de la charge d'une armature) est liée à U_0 par $|q_0| = CU_0$,

d'où $|q_0| = 5{,}56 \cdot 10^{-10} \times 250 = 1{,}39 \cdot 10^{-7}$ C $= 0{,}139$ μC.

c) α) Tout au long de la décharge du condensateur dans le résistor, l'intensité algébrique i garde un signe constant : le courant a un sens constant. Comme $i > 0$, ce courant chemine dans le sens + indiqué, c'est-à-dire de B vers A à l'extérieur du condensateur.
Les électrons cheminent donc, à l'extérieur du condensateur de A vers B : l'armature A qui cède lors de la décharge ses électrons excédentaires est donc l'armature négative, B est donc l'armature positive.

β) L'armature B étant chargée positivement $V_B > V_A$, par suite à l'instant $t = 0$, $(V_B - V_A)_0 = U_0$.

Comme $V_B = V_{B'}$ et $V_A = V_{A'}$, il s'ensuit $(V_{B'} - V_{A'})_0 = U_0$. (1)

D'après la loi d'Ohm, aux bornes du résistor, à la date $t = 0$, en désignant par i_0 l'intensité du courant : $(V_{B'} - V_{A'})_0 = Ri_0$. (2)

D'après (1) et (2) : $Ri_0 = U_0$, d'où $R = \dfrac{U_0}{i_0} = \dfrac{250}{5} = 50\ \Omega$.

γ) En fin de décharge la charge de B a diminué de $|q_0|$, celle de A a augmenté de $|q_0|$: le courant de décharge a véhiculé la quantité d'électricité $|q_0| = 0{,}139$ μC.

δ) Initialement le condensateur a en réserve l'énergie électrique :

$$W_{él} = \frac{1}{2} CU_0^2 = \frac{1}{2} \times 5{,}56 \cdot 10^{-10} \times 250^2 = 1{,}74 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

En fin de décharge cette énergie s'est transférée par l'intermédiaire d'une égale quantité de chaleur $W_{cal} = W_{él}$ dissipée par effet Joule dans le résistor.

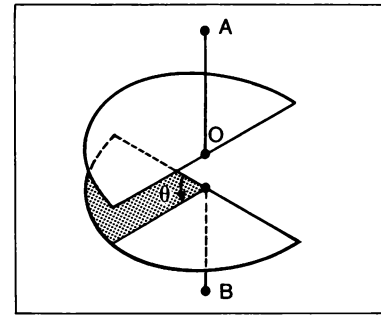
D'après le graphique, on peut admettre que la décharge dure à peu près $t = 200$ ns $= 200 \cdot 10^{-9}$ s $= 2 \cdot 10^{-7}$ s.

Par suite la puissance calorifique moyenne est :

$$\mathcal{P}_{cal} = \frac{W_{cal}}{t} = \frac{1{,}74 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-7}} = 87 \text{ W}.$$

Ainsi bien que $W_{él}$ soit faible, le condensateur en se déchargeant très vite peut dissiper une grande puissance (d'où les applications : flash électronique, ...).

E 70. *Un condensateur variable rotatif est composé de 2 lames semi-circulaires, parallèles, de même rayon* R = 8 cm, *séparées par une couche d'air d'épaisseur constante* d = 1,2 mm.
En tournant la lame A *autour de l'axe* OA, *on fait varier la surface* S *des armatures en regard. On appelle* θ *l'angle au centre, mesuré en degrés, du secteur circulaire représenté en gris sur la figure.*



a) *Montrer que la capacité* C *du condensateur variable est fonction linéaire de* θ *et déterminer cette fonction.*

b) *Le condensateur est réglé à* $\theta_1 = 180°$, *on le charge à l'aide d'un générateur qui maintient entre* A *et* B *la tension électrique constante* $(u_{AB})_1 = 100$ V.
Quelle est la charge $q_{A,1}$ *de* A? *Quelle est l'énergie électrique* $W_{él,1}$ emmagasinée alors dans le condensateur?

c) *On sépare les armatures du générateur. On tourne la lame* A, *à l'aide d'une pince isolante de façon que l'angle* θ *prenne la valeur* $\theta_2 = 90°$.
Que peut-on dire de la charge de l'armature A? *Quelle est la tension électrique finale* $(u_{AB})_2$? *Quelle est l'énergie électrique* $W_{él,2}$ *emmagasinée dans le condensateur? Comment expliquer la variation d'énergie?*

S 70. *a*) L'épaisseur de l'isolant étant constante, le condensateur est plan : sa capacité $C = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}$.

La surface S du secteur circulaire gris, représentant l'aire d'une armature en regard de l'autre, est proportionnelle à θ : $S = k\theta$.

Pour évaluer k, traduisons que pour $\theta = 180°$, S est égale à $\dfrac{\pi R^2}{2}$, par suite

$$k = \frac{S}{\theta} = \frac{\dfrac{\pi R^2}{2}}{180} = \frac{\pi R^2}{360}.$$

La surface S est donc exprimée par $S = \dfrac{\pi R^2}{360}\theta$ (avec θ en degrés).

La capacité $C = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \pi R^2}{360\, d}\theta$: elle est fonction linéaire de θ.

Numériquement, en remarquant que pour l'air $\varepsilon_r \simeq 1$, $C = 4{,}11 \cdot 10^{-13}\,\theta$ (avec C en farad et θ en degrés).

b) Réponses :

$$q_{A,1} = C_1 \cdot (u_{AB})_1 = 7{,}4 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$
$$W_{él,1} = \frac{1}{2} C_1 (u_{AB})_1^2 = 3{,}7 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

a) La charge de l'armature A ne varie pas, elle se répartit maintenant sur une surface deux fois plus petite. (Bien sûr, la charge de B, opposée à celle de A, ne change pas non plus.)

• Lorsque $\theta = \theta_1$, $q_{A,1} = C_1 (u_{AB})_1$;
lorsque $\theta = \theta_2$, $q_{A,2} = q_{A,1} = C_2 (u_{AB})_2$;

par suite $C_1 (u_{AB})_1 = C_2 (u_{AB})_2$, soit $(u_{AB})_2 = \dfrac{C_1}{C_2} (u_{AB})_1$.

Comme $\theta_2 = \dfrac{\theta_1}{2}$, $C_2 = \dfrac{C_1}{2}$, $(u_{AB})_2 = 2 (u_{AB})_1 = 200$ V.

• Comme la charge du condensateur $|q|$ reste constante, utilisons l'expression de l'énergie $W_{él} = \dfrac{1}{2} \dfrac{q^2}{C}$.

Pour $\theta = \theta_1$, $W_{él,1} = \dfrac{1}{2} \dfrac{q^2}{C_1}$ (1)

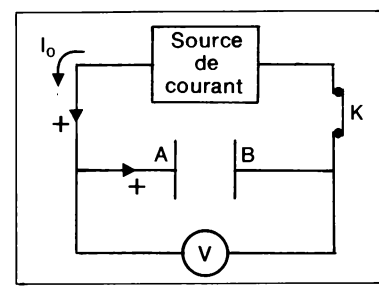
pour $\theta = \theta_2$, $W_{él,2} = \dfrac{1}{2} \dfrac{q^2}{C_2}$. (2)

Faisons le rapport (2) sur (1) :

$$\frac{W_{él,2}}{W_{él,1}} = \frac{C_1}{C_2} = 2 \quad \text{d'où} \quad W_{él,2} = 2 W_{él,1}.$$

• L'énergie électrique a varié de $\Delta W_{él} = W_{él,2} - W_{él,1} = W_{él,1} = 3{,}7 \cdot 10^{-7}$ J : elle a augmenté. Pour tourner la lame A, l'observateur a dû fournir un travail moteur W, autre que celui nécessaire pour vaincre les éventuels frottements mécaniques, ce travail W se stocke sous forme d'énergie électrique : $W = \Delta W_{él}$.

E 71. *(Charge d'un condensateur par un courant d'intensité constante.)*
Il existe des générateurs, appelés « source de courant » ou « générateur de courant idéal », qui débitent un courant d'intensité constante. Dans cette expérience, on utilise un tel générateur, l'intensité constante du courant débité est $I_0 = 10$ µA.
Ce générateur initialement neutre est placé dans le circuit ci-contre qui comprend un condensateur AB *aux bornes duquel est branché un voltmètre. La capacité de* AB *est* $C = 1$ µF, *son isolant est constitué par une feuille de papier paraffiné d'épaisseur constante* $d = 10^{-2}$ mm.

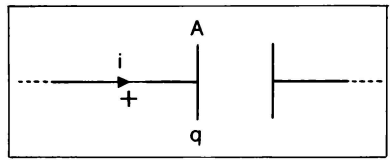


a) *A l'instant* $t = 0$, *on abaisse l'interrupteur* K.
Comment varie en fonction du temps la tension u_{AB} *aux bornes du condensateur? Au bout de combien de temps cette tension est-elle égale à* 100 V?

b) *A la date* $t = 45$ s, *une étincelle éclate entre les armatures et perfore le papier paraffiné, on dit que le condensateur est « claqué ». Quel est le champ électrique maximal* E_d, *appelé champ disruptif (ou rigidité diélectrique), supportable par le papier paraffiné?*

Quelle est l'énergie transférée, essentiellement par de la chaleur, lors de l'étincelle électrique?

30 Relation entre l'intensité d'un courant et la charge d'une armature d'un condensateur.



• En général, on considère la charge algébrique q de l'armature A par où arrive le sens + suivant lequel on mesure l'intensité algébrique i.

• Pendant la durée δt, suffisamment faible pour supposer i constant, le courant véhicule la quantité d'électricité algébrique $\delta q = i\delta t$ qui représente aussi la variation de la charge q de l'armature A.

Par suite $i = \frac{\delta q}{\delta t}$, à la limite lorsque δt est infiniment petit :

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}.$$

Cette expression relie ainsi i et la *charge de l'armature par où arrive le sens +*.

S 71. *a*) • Appelons q la charge algébrique de l'armature A par où arrive le sens + suivant lequel est mesurée l'intensité algébrique i du courant.
A chaque instant $i = \dot{q}$.
La source de courant envoyant un courant d'intensité constante I_0, dans le sens +, $i = I_0$ quel que soit t.
Par suite $\dot{q} = I_0$.
On passe de $\dot{q}$ à q par intégration (revoir éventuellement ℳ 2), par suite $q = I_0 t + C^{te}$. La constante doit être prise égale à zéro puisqu'à la date $t = 0$, la charge q de l'armature A est nulle.
En résumé $q = I_0 t$ (1).

• q désignant la charge de l'armature A, à tout instant $q = Cu_{AB}$ (revoir ℳ 28), compte tenu de (1), $I_0 t = Cu_{AB}$, soit :

$$u_{AB} = \frac{I_0 t}{C} = \frac{10 \cdot 10^{-6} \times t}{10^{-6}} = 10\ t \text{ en unités S.I.}$$

• La tension $u_{AB} = 100$ V, pour $t = 10$ s.

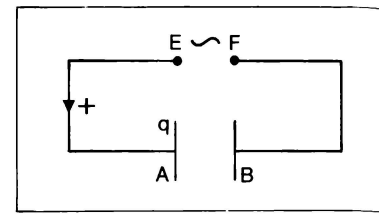
b) • Le champ électrique entre les armatures a pour module $E = \frac{u_{AB}}{d} = \frac{10\ t}{d} = 10^6\ t$ en unités S.I. : il augmente proportionnellement à t.

• A la date $t = 45$ s, le champ électrique atteint la valeur E_d du champ disruptif : $E_d = 10^6 \times 45 = 4{,}5 \cdot 10^7\ V \cdot m^{-1}$.

• A la date $t = 45$ s, juste avant que l'étincelle éclate, la tension $u_{AB} = 10 \times 45 = 450$ V, l'énergie électrique en réserve dans le condensateur est $W_{él} = \frac{1}{2} C (u_{AB})^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times (450)^2 = 0{,}101$ J.

Lors de l'étincelle le condensateur se décharge, admettons que la décharge soit pratiquement complète, l'énergie $W_{él}$ se transfère par l'intermédiaire d'une quantité de chaleur pratiquement égale : $W_{cal} \simeq W_{él} \simeq 0{,}1$ J.
Note : pendant la durée très brève de l'étincelle on peut négliger l'énergie qui continue à être apportée par le générateur.

E 72. *Aux bornes d'une prise E.D.F., on branche un condensateur* AB *de capacité* 5 μF.
La charge q *de l'armature* A *est fonction du temps :* $q = 1{,}56 \cdot 10^{-3} \sin 100\,\pi t$ *en unités S.I.*



a) *Donner l'expression de l'intensité algébrique* i *du courant dans le circuit. Préciser sa valeur maximale* I_m *et sa valeur efficace* $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

b) *Donner l'expression de la tension algébrique* u_{EF} *en fonction du temps. Préciser sa valeur maximale* U_m *et sa valeur efficace* $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$.

S 72. *a*) Le sens + entre dans le condensateur par l'armature A, par suite l'intensité i du courant mesurée suivant ce sens + est liée à la charge q de A, par $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$.
Donc $i = 1{,}56 \cdot 10^{-3} \times 100\,\pi \cos 100\,\pi t$ (puisque la dérivée de sin ax est a cos ax), soit $i = 0{,}49 \cos 100\,\pi t$.
L'intensité i est une fonction sinusoïdale du temps de valeur maximale $I_m = 0{,}49$ A (atteinte aux dates t telles que $\cos 100\,\pi t = 1$), de valeur efficace $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}346$ A.

b) • La charge q représente la charge algébrique de l'armature A, elle est donc liée à la tension u_{AB} par $q = Cu_{AB}$.

Il en résulte que $u_{AB} = \frac{q}{C} = \frac{1{,}56 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-6}} \sin 100\,\pi t = 312 \sin 100\,\pi t$.

Comme $V_E = V_A$ et $V_F = V_B$, $u_{EF} = u_{AB} = 312 \sin 100\,\pi t$ en unités S.I.

La valeur maximale de u_{EF} est $U_m = 312$ V, sa valeur efficace $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 221$ V.

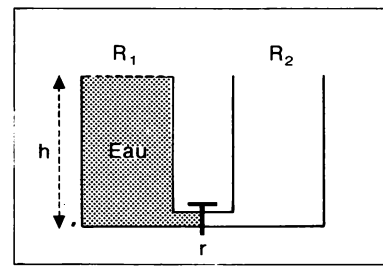
• *Remarques :*
— la prise E.D.F. est ce qu'on appelle une « prise 220 V »;
— l'énoncé ne demande pas la fréquence de q, i et u_{EF} : ces trois fonctions ont la même fréquence N = 50 Hz;
— l'isolant du condensateur n'est pas traversé par les électrons, le condensateur subit une succession périodique de charges et de décharges, nous y reviendrons.

E 73. A) *(Décharge d'un condensateur dans un autre condensateur.)*
On charge un condensateur A_1B_1 *de capacité* $C_1 = 5\ \mu F$ *sous la tension* $U_1 = 100$ V. *On sépare ce condensateur du générateur, puis on le relie à un condensateur* A_2B_2 *initialement neutre de capacité* $C_2 = 10\ \mu F$, *ces opérations se faisant sans perte de charge.*

a) *Quelle est la tension finale aux bornes des deux condensateurs?*

b) *Quelle est la variation d'énergie électrique observée lorsque l'on relie le condensateur* A_1B_1 *au condensateur* A_2B_2? *Conclure.*

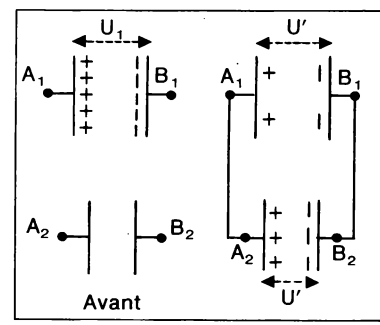
B) *(Analogie hydraulique.)*
Deux réservoirs R_1 *et* R_2, *ouverts à l'air libre, sont reliés à leur base par un tuyau, de volume intérieur négligeable, muni d'un robinet* r. *Les deux réservoirs identiques sont des cylindres de hauteur* h, *de section* S.
Initialement le robinet r *est fermé, le réservoir* R_1 *est plein d'eau, le réservoir* R_2 *est vide.*
Le système est l'eau contenue dans le réservoir R_1.



a) *Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur initiale* $E_{p,i}$ *du système en fonction de* h, S *et* ϖ_0 *(poids volumique de l'eau).*

b) *On ouvre le robinet* r. *Quelle est l'énergie potentielle de pesanteur finale* $E_{p,f}$ *du système à l'équilibre? Conclure.*

S 73. A) *a)* • Présentation de la démarche : lorsqu'on relie A_1 à A_2 et B_1 à B_2, un mouvement électronique a lieu dans les fils de jonction, de A_2 vers A_1 dans le fil A_1A_2, de B_1 vers B_2 dans le fil B_1B_2; au cours de ce mouvement électronique il y a conservation de la charge positive de l'ensemble $[A_1; A_2]$ d'une part, de la charge négative de l'ensemble $[B_1; B_2]$ d'autre part; le mouvement électronique s'arrête lorsque $U_{A_1B_1} = U_{A_2B_2}$, nous appellerons U′ cette valeur commune.



• La charge de l'ensemble $[A_1; A_2]$ est initialement $C_1U_1 + 0$.
La charge de l'ensemble $[A_1; A_2]$ est finalement $C_1U' + C_2U'$.
Comme la charge se conserve $C_1U_1 = (C_1 + C_2)\,U'$

d'où $$U' = U_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 100 \times \frac{5}{15} = 33{,}3 \text{ V}.$$

b) • Initialement l'énergie électrique en réserve dans le système $[A_1B_1; A_2B_2]$ est :

$$W_{\text{él, init}} = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 + 0.$$

• Finalement l'énergie électrique en réserve dans ce système est :

$$W_{\text{él, fin}} = \frac{1}{2} C_1 U'^2 + \frac{1}{2} C_2 U'^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2)\, U'^2. \qquad (1)$$

Comme $U' = U_1 \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$, en reportant dans (1) on aboutit à :

$$W_{\text{él. fin}} = \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} U_1^2.$$

• La variation d'énergie $\Delta W_{\text{él}} = W_{\text{él. fin}} - W_{\text{él. init}}$

$$= \frac{1}{2} C_1 U_1^2 \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} C_1 U_1^2 \left(\frac{-C_2}{C_1 + C_2} \right).$$

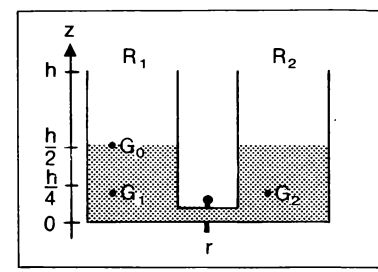
Cette variation est négative, le système perd de l'énergie électrique : cette perte correspond à l'apparition de chaleur par effet Joule dans les fils de jonction. (Il faut remarquer qu'elle ne dépend pas de la résistance de ces fils.)

• Numériquement : $\Delta W_{\text{él}} = \frac{1}{2} \times 5 \cdot 10^{-6} \times 100^2 \left(\frac{-10}{15} \right) = -1{,}67 \cdot 10^{-2}$ J.

B) *a*) • Le volume d'eau constituant le système est $V = hS$, cette eau a pour poids $P = V\varpi_0 = hS\varpi_0$.

• Prenons pour origine des altitudes z, l'altitude du fond des deux réservoirs R_1 et R_2.

• Initialement le centre d'inertie G_0 du système (l'eau est alors uniquement dans le réservoir R_1) est à l'altitude $z = \dfrac{h}{2}$: l'énergie potentielle de pesanteur du système est :



$$E_p = P \frac{h}{2} = hS\varpi_0 \frac{h}{2} = \frac{1}{2} h^2 S\varpi_0.$$

b) • Finalement le système s'équilibre lorsque les surfaces libres des deux nappes d'eau sont dans le même plan horizontal. Alors le réservoir R_1 contient la moitié de l'eau, le centre d'inertie G_1 de cette eau est à l'altitude $\dfrac{h}{4}$, son énergie potentielle est $\dfrac{P}{2} \times \dfrac{h}{4} = \dfrac{1}{8} h^2 S\varpi_0$.

De même l'eau contenue dans R_2 a pour énergie potentielle $\dfrac{1}{8} h^2 S\varpi_0$.

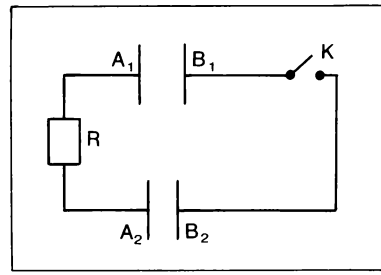
L'énergie potentielle de pesanteur totale du système est donc $\dfrac{1}{4} h^2 S\varpi_0$.

• Entre les deux états, l'énergie potentielle a donc varié de

$\Delta E_p = \dfrac{1}{4} h^2 S\varpi_0 - \dfrac{1}{2} h^2 S\varpi_0 = -\dfrac{1}{4} h^2 S\varpi_0$: elle a diminué.

Cette perte d'énergie potentielle correspond à l'apparition de chaleur (frottements dans l'eau, sur les parois) qui augmente l'énergie interne de l'eau.

E 74. *Un condensateur* A_1B_1, *de capacité* $C_1 = 0{,}5\ \mu F$, *est chargé :* $u_{A_1B_1} = 60$ V.
Un condensateur A_2B_2, *de capacité* $C_2 = 2\ \mu F$ *est chargé :* $u_{A_2B_2} = 40$ V.
On abaisse l'interrupteur K, *dans le circuit schématisé ci-contre qui comprend en plus un résistor* R.
Déterminer :



a) *la tension finale* $u'_{A_1B_1}$;

b) *le sens du courant qui a traversé le résistor* R *et la quantité d'électricité véhiculée par ce courant:*

c) *l'énergie dissipée par effet Joule dans le résistor (on néglige la résistance des fils devant celle du résistor).*

S 74. *a)* • La charge initiale de A_1 est $q_1 = C_1 u_{A_1B_1} = 3 \cdot 10^{-5}$ C.
La charge initiale de A_2 est $q_2 = C_2 u_{A_2B_2} = 8 \cdot 10^{-5}$ C.
• A l'équilibre, l'intensité du courant s'annule, la tension aux bornes du résistor est nulle, les condensateurs supportent la même tension : $u'_{A_1B_1} = u'_{A_2B_2}$.
• La charge de l'ensemble (armature A_1, fil, résistor, armature A_2) s'est conservée, appelons q'_1 et q'_2 les charges finales de A_1 et A_2 :

$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2 = 11 \cdot 10^{-5} \text{ C}.$$

Comme $q'_1 = C_1 u'_{A_1B_1}$ et $q'_2 = C_2 u'_{A_2B_2} = C_2 u'_{A_1B_1}$,
on en déduit $(C_1 + C_2)\, u'_{A_1B_1} = 11 \cdot 10^{-5}$

d'où
$$u'_{A_1B_1} = \frac{11 \cdot 10^{-5}}{C_1 + C_2} = 44 \text{ V}.$$

b) Les charges q'_1 et q'_2 sont respectivement $q'_1 = C_1 u'_{A_1B_1} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ C et $q'_2 = C_2 u'_{A_2B_2} = 8{,}8 \cdot 10^{-5}$ C.
La charge de l'armature A_1 a varié de $q'_1 - q_1 = -0{,}8 \cdot 10^{-5}$ C : elle a diminué.
La charge de l'armature A_2 a subi la variation opposée : elle a augmenté de $0{,}8 \cdot 10^{-5}$ C. Par suite on en déduit :
— que le courant a traversé le résistor de A_1 vers A_2;
— que le courant a véhiculé la quantité d'électricité $q = 0{,}8 \cdot 10^{-5}$ C $= 8\ \mu$C.

c) • Initialement l'énergie électrique en réserve dans A_1B_1 et A_2B_2 est :

$$W_{él} = \frac{1}{2} C_1 u^2_{A_1B_1} + \frac{1}{2} C_2 u^2_{A_2B_2} = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

• Finalement l'énergie électrique dans A_1B_1 et A_2B_2 est :

$$W'_{él} = \frac{1}{2} C_1 u'^2_{A_1B_1} + \frac{1}{2} C_2 u'^2_{A_2B_2} = \frac{1}{2} (C_1 + C_2)\, u'^2_{A_1B_1} = 2{,}42 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

• La variation d'énergie électrique $W'_{él} - W_{él} = -8 \cdot 10^{-5}$ J : elle est négative. Une quantité de chaleur égale à $8 \cdot 10^{-5}$ J est apparue par effet Joule dans le résistor.

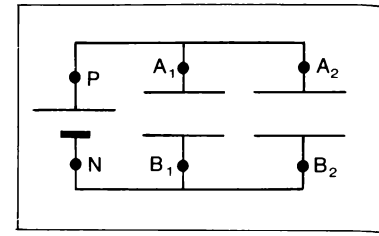
E 75. A) *Deux condensateurs* A_1B_1 *et* A_2B_2 *ont respectivement pour capacités* $C_1 = 3$ nF *et* $C_2 = 7$ nF, *ils sont placés dans le circuit schématisé ci-contre qui comprend un générateur de tension continue de f.é.m.* E = 6 V.

a) *Comment sont associés les deux condensateurs?*

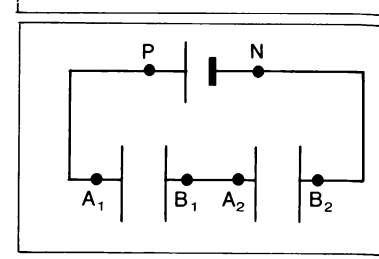
b) *Quelles sont les charges q_1 et q_2 des armatures A_1 et A_2?*

c) *Quelles sont les énergies emmagasinées dans chacun d'entre eux?*

d) *Quelle est la capacité du condensateur équivalent à l'association?*



B) *Les deux condensateurs précédents initialement neutres sont maintenant associés au générateur précédent de la façon schématisée ci-contre.*



a) *Comment sont associés les deux condensateurs par rapport au générateur?*

b) *Que peut-on dire de la valeur absolue de la charge portée par chaque armature? La calculer.*

c) *Quelles sont les énergies emmagasinées dans chaque condensateur?*

d) *Quelle est la capacité du condensateur équivalent à l'association?*

S 75. A) *a*) Les deux condensateurs supportent la même tension imposée par le générateur : ils sont associés en parallèle.

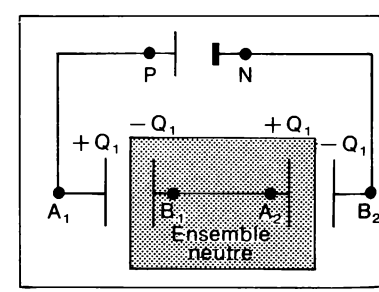
b) En fin de charge, le générateur ne débite plus, la tension entre ses bornes $(U_{PN})_0$ est alors égale à sa f.é.m. E, les deux condensateurs supportent la tension $U_{A_1B_1} = U_{A_2B_2} = (U_{PN})_0 = E$.
L'armature A_1 porte la charge $q_1 = C_1 U_{A_1B_1} = C_1 E$, l'armature A_2 porte la charge $q_2 = C_2 U_{A_2B_2} = C_2 E$.
Numériquement $q_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ C, $q_2 = 4{,}2 \cdot 10^{-8}$ C.

c) L'énergie électrique emmagasinée dans A_1B_1 est $W_1 = \frac{1}{2} C_1 E^2 = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ J, l'énergie dans A_2B_2 est $W_2 = \frac{1}{2} C_2 E^2 = 1{,}26 \cdot 10^{-7}$ J.

d) Le condensateur de capacité $C = C_1 + C_2 = 10$ nF est équivalent à l'association A_1B_1 et A_2B_2 en parallèle :
— le condensateur équivalent prendrait la charge $(C_1 + C_2)E$ égale à la charge totale de A_1 et A_2;
— le condensateur équivalent emmagasinerait l'énergie $W = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)E^2$ égale à l'énergie totale en réserve dans A_1B_1 et A_2B_2.

B) *a*) Les deux condensateurs sont placés en série avec le générateur, chacun ne supporte qu'une fraction de la tension imposée par le générateur.

b) En fin de charge, $(U_{PN})_0 = E = U_{A_1B_1} + U_{A_2B_2}$ (1).
L'armature A_1 porte une charge $q_1 = C_1 U_{A_1B_1}$, l'armature B_1 en regard porte la charge opposée $-q_1$.
L'armature A_2 porte une charge $q_2 = C_2 U_{A_2B_2}$, l'armature B_2 porte $-q_2$.
Le système [B_1, fil B_1A_2, A_2], en gris sur la figure, est isolé. Ce système est initialement neutre puisque les condensa-



teurs sont alors déchargés. Il doit donc rester globalement neutre :

$$-q_1+q_2=0 \quad \text{soit} \quad q_1=q_2.$$

Par suite les charges de A_1, B_1, A_2 et B_2 sont respectivement $+q_1$, $-q_1$, $+q_1$ et $-q_1$: elles ont la même valeur absolue q_1.

• Calculons q_1.

D'après $q_1=C_1U_{A_1B_1}$, $\quad U_{A_1B_1}=\dfrac{q_1}{C_1}$;

d'après $q_2=q_1=C_2U_{A_2B_2}$, $\quad U_{A_2B_2}=\dfrac{q_1}{C_2}$;

reportons dans (1) : $E=\dfrac{q_1}{C_1}+\dfrac{q_2}{C_2}=q_1\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}\right)=q_1\dfrac{(C_1+C_2)}{C_1C_2}$.

Par suite $q_1=\dfrac{C_1C_2E}{C_1+C_2}=1{,}26\cdot10^{-8}$ C.

c) L'énergie électrique en réserve dans A_1B_1 est $W_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{q_1^2}{C_1}=2{,}65\cdot10^{-8}$ J, dans A_2B_2 est $W_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{q_1^2}{C_2}=1{,}13\cdot10^{-8}$ J.

d) Le condensateur de capacité C telle que $\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}$, c'est-à-dire de capacité égale à $C=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}=2{,}1$ nF, est équivalent à l'association A_1B_1 et A_2B_2 en série :

— le condensateur équivalent prendrait la charge $CE=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}E=q_1$;

— le condensateur équivalent emmagasinerait l'énergie électrique :

$$W=\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C}=\frac{1}{2}q_1^2\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)=\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1}+\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_2}=W_1+W_2.$$

31 Association de condensateurs

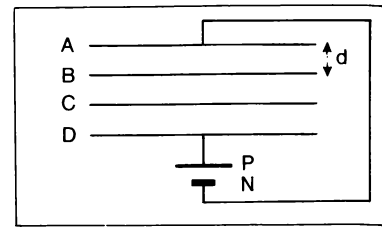
• Deux condensateurs, de capacités C_1 et C_2, associés en parallèle, supportent la même tension; la capacité C de l'association est :

$$\mathbf{C=C_1+C_2.}$$

• Deux condensateurs, de capacités C_1 et C_2, associés en série dans un circuit électrique, prennent la même charge; la capacité C de l'association est telle que :

$$\mathbf{\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}.}$$

E 76. *Quatre lames d'aluminium*, A, B, C *et* D, *d'épaisseur négligeable, sont séparées par des couches d'air d'épaisseur constante égale à* $d = 0{,}4$ mm.
La surface de chaque plaque est $S = 300\ cm^2$.



a) *On relie* A *à la borne négative* N *d'une source de tension,* D *à la borne positive* P. *Quelle est la capacité de l'ensemble* A, B, C *et* D?

b) *On retire la lame* B *sans modifier la position des lames* A, C *et* D. *Quelle est la capacité de l'ensemble* A, C *et* D?

c) *On replace la lame* B *à égale distance de* A *et* C.
On relie A *à* C *par un fil conducteur,* B *à* D *par un autre fil conducteur. Sur un schéma, indiquer comment se répartissent les charges sur les lames. Quelle est la capacité de l'ensemble?*

S 76. *a*) Les trois condensateurs AB, BC et CD sont identiques, chacun a une capacité $C = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}$ $\left(\text{avec } \varepsilon_r \simeq 1 \text{ car l'isolant est l'air et } \varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi\ 10^9}\right)$. Ces trois condensateurs sont en série avec le générateur, la capacité de l'ensemble C_{ens} est telle que $\dfrac{1}{C_{ens}} = \dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C}$ soit $C_{ens} = \dfrac{C}{3} = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{3d} = 2{,}21 \cdot 10^{-10}$ F.

b) • La lame B étant retirée, il reste deux condensateurs différents AC et CD. L'épaisseur de la couche d'air entre A et C est pratiquement 2d puisque l'épaisseur de la lame retirée, B, est négligeable. Donc $C_{AC} = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{2d}$.

La capacité de CD est $C_{CD} = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}$.

La capacité de l'ensemble C_{ens} est telle que :

$$\frac{1}{C_{ens}} = \frac{1}{C_{AC}} + \frac{1}{C_{CD}}, \text{ soit } \frac{1}{C_{ens}} = \frac{1}{\dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{2d}} + \frac{1}{\dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}} = \frac{3d}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}.$$

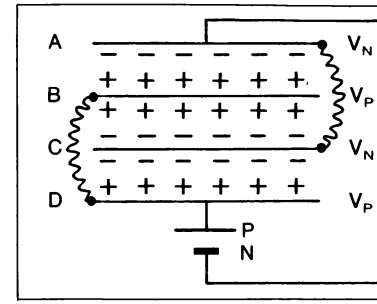
Par suite $C_{ens} = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{3d} = 2{,}21 \cdot 10^{-10}$ F : la capacité de l'ensemble n'a pas varié lorsqu'on retire B.

• *Remarques :*

— si on retire B et C, la capacité de AD est $C_{AD} = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{3d}$: elle est encore égale à la capacité précédente;
— considérons, dans l'association série du a, par exemple la lame C : sur sa face en regard de l'armature positive D, elle porte la charge $-q$ sur sa face en ragard de l'armature B elle porte la charge $+q$, on constate que l'armature C joue le rôle d'une « armature double » et qu'elle reste globalement électriquement neutre.

c) • Les lames A et C sont au potentiel V_N, les lames B et D au potentiel $V_P > V_N$.

Les trois condensateurs supportent la même tension $V_P - V_N$ imposée par le générateur : ils sont donc associés en parallèle, ils ont la même charge $|q|$.

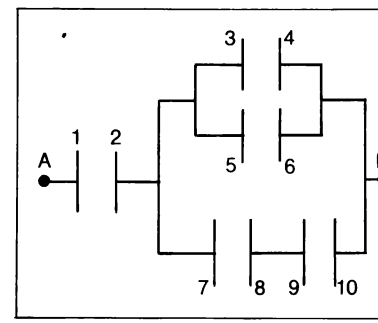


• L'armature D porte sur sa face en regard de C, la charge positive $q = C(V_P - V_N)$ avec $C = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}$.

L'armature C porte sur sa face en regard de D la charge $-q$; elle porte aussi sur sa face en regard de B la charge $-q$: elle joue donc le rôle d'une « armature double ». Il en est de même pour B.

• Les trois condensateurs identiques étant ainsi associés en parallèle, la capacité de l'ensemble $C_{ens} = C + C + C = 3C = \dfrac{3\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = 1{,}99 \cdot 10^{-9}$ F $\simeq 2$ nF.

E 77. *On considère l'association de condensateurs schématisée ci-contre.*
On nomme $C_{j,k}$ la capacité du condensateur dont les armatures sont j *et* k.
Avant d'être associés les condensateurs étaient tous neutres.



a) *Quelle est la capacité* C *de l'ensemble? On donne*
$C_{1,2} = 3$ μF; $C_{3,4} = 2$ μF; $C_{5,6} = 1$ μF;
$C_{7,8} = 4$ μF; $C_{9,10} = 4$ μF.

b) *On établit entre* A *et* B *une tension* u_{AB}.

α) *Que peut-on dire de* $q_2 + q_3 + q_5 + q_7$?

β) *Que peut-on dire des charges* q_7, q_8, q_9 et q_{10}?

γ) *En déduire que* $q_1 = q_3 + q_5 + q_7$ *et* $q_1 = -(q_4 + q_6 + q_{10})$.

S 77. *a*) Nous ne donnons que des indications et la réponse :
— soit P l'association en parallèle (3, 4) et (5, 6) : $C_P = C_{3,4} + C_{5,6} = 3$ μF
— soit S l'association en série (7, 8) et (9, 10) : $C_S = \dfrac{C_{7,8} \cdot C_{9,10}}{C_{7,8} + C_{9,10}} = 2$ μF
— soit T l'association en parallèle P et S : $C_T = C_P + C_S = 5$ μF
— enfin $C = \dfrac{C_{1,2} \cdot C_T}{C_{1,2} + C_T} = 1{,}875$ μF.

b) α) Le système (2, 3, 5, 7) est isolé, initialement il était neutre puisque les condensateurs étaient tous neutres. Il doit rester neutre : $q_2 + q_3 + q_5 + q_7 = 0$.

β) Les deux condensateurs (7, 8) et (9, 10) sont en série : les armatures 7, 8, 9 et 10 portent en valeur absolue la même charge, algébriquement $q_7 = -q_8 = q_9 = -q_{10}$.

γ) • Pour le condensateur (1, 2) : $q_2 = -q_1$, d'après la relation établie en α) : $-q_1 + q_3 + q_5 + q_7 = 0$, donc $q_1 = q_3 + q_5 + q_7$.
• Pour le condensateur (3, 4) : $q_4 = -q_3$; pour le condensateur (5, 6) : $q_6 = -q_5$; d'après β) $q_{10} = -q_7$; par suite :

$$q_4 + q_6 + q_{10} = -q_3 - q_5 - q_7 = -(q_3 + q_5 + q_7) = -q_1.$$

• *Est-ce que cela a un sens de parler de la charge en réserve dans un condensateur?*

En toute rigueur si on considère le système « condensateur chargé AB », portant les charges q_A sur A et $q_B = -q_A$ sur B, sa charge globale est nulle.
Cependant la valeur absolue de q_A et q_B, notée $|q|$ et appelée abusivement « charge du condensateur », est une grandeur intéressante : elle est égale par exemple à la quantité d'électricité véhiculée par le courant de charge.
par le courant de décharge.

• *Est-ce qu'on peut dire qu'un condensateur chargé se comporte comme un générateur?*

Les points communs :
— le condensateur peut en se déchargeant donner naissance à un courant comme un générateur;
— le courant de décharge sort par l'armature + comme le courant sort du pôle + du générateur.
La différence très importante : le générateur maintient une tension entre ses bornes lorsqu'il débite (qui reste constante si le générateur est parfait), au contraire le condensateur « perd » progressivement sa tension et « s'affaiblit » jusqu'à devenir neutre.

• *Pourquoi associe-t-on des condensateurs en série alors que la capacité de l'ensemble est plus faible?*

Considérons des condensateurs identiques de capacité C_1. Supposons que chaque condensateur ne supporte au maximum qu'une tension U_1 (au-delà il y a risque de claquage, revoir E 71). Lorsqu'on groupe n de ces condensateurs en série, la capacité de l'ensemble devient $\frac{C_1}{n}$, mais l'association peut supporter des tensions allant jusqu'à nU_1 : c'est l'avantage d'une telle association.

• *Dans* E 74, *doit-on dire que les condensateurs sont en série ou en parallèle?*

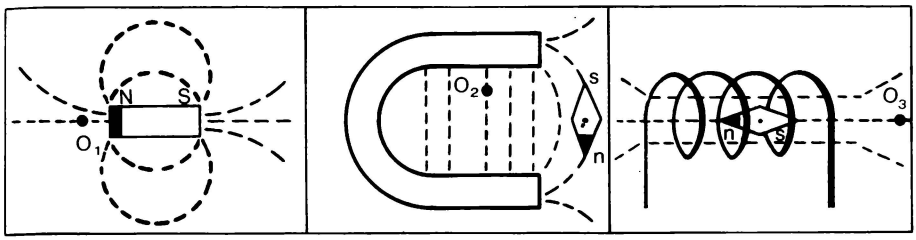
Les lois d'association que nous avons énoncées dans E 31 ne sont valables que si les condensateurs initialement neutres sont dans un groupement susceptible d'être mis sous tension. Il est difficile de parler d'association série ou parallèle lorsqu'un circuit ne comprend que deux condensateurs initialement non neutres tous les deux. En effet au début de la décharge de l'un dans l'autre, les tensions aux bornes des deux condensateurs ne sont pas les mêmes (on ne peut pas dire qu'ils sont en parallèle), à l'équilibre les tensions aux bornes des deux condensateurs deviennent les mêmes, on pourrait dire alors qu'ils sont en parallèle.

• *A quoi sert un condensateur?*

Les condensateurs à vide sont des sources de champ électrique uniforme très intéressantes pour agir sur les particules chargées.
Les condensateurs peuvent être utilisés comme réserve d'énergie électrique : l'énergie en réserve est faible mais la puissance libérée peut être grande.
Un condensateur une fois chargé arrête un courant continu, mais il laisse « passer » les courants alternatifs et ce d'autant mieux que leur fréquence est plus grande : on peut utiliser un condensateur pour filtrer des courants.

7 MOUVEMENTS DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME

E 78. *Sur les schémas ci-dessous on a représenté quelques lignes de champ magnétique non orientées. Le point O_1 est sur l'axe de symétrie de l'aimant droit, le point O_3 est sur l'axe de symétrie de la bobine parcourue par un courant.*



a) *Orienter les lignes de champ, préciser les pôles de l'aimant en* U, *les faces de la bobine, le sens du courant dans cette dernière. Dessiner les vecteurs champ magnétique en O_1, O_2 et O_3.*

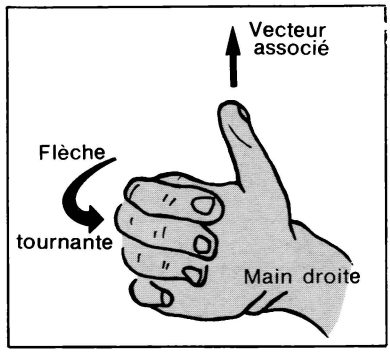
b) *Est-ce qu'on peut dire que le pôle nord d'une aiguille aimantée mobile dans toutes les directions est toujours attiré par le pôle sud ou la face sud de la source de champ magnétique?*

c) *Comment peut-on reconnaître qu'un espace champ magnétique est uniforme?*

d) *Quel est l'ordre de grandeur du champ magnétique en O_1 : 10 T, 10^{-5} T, 10^{-2} T?*

32 **Règle de la main droite.**

Pour passer d'une grandeur représentée par une flèche tournante à une grandeur vectorielle associée, on peut utiliser la règle de la main droite (exemples : pour passer du sens du courant dans une bobine au vecteur champ magnétique $\vec{B}$ créé par cette bobine, pour passer du sens positif d'un circuit plan au vecteur unitaire normal $\vec{u}_N$, ...).



Pour cela on place les doigts (pouce excepté) de la **main droite** comme la flèche tournante, le pouce dressé indique alors le sens du vecteur associé.

33 Vecteur champ magnétique $\vec{B}$.

• Soit O un point d'un espace champ magnétique créé par une source de champ magnétique (aimant, circuit parcouru par un courant, Terre).
Pour déterminer la direction et le sens du vecteur champ magnétique $\vec{B}$, en O, on peut utiliser une petite aiguille aimantée pouvant s'orienter dans n'importe quelle direction : le vecteur $\vec{B}$ est parallèle à l'axe de l'aiguille exploratrice équilibrée en position stable, il sort par le pôle nord de l'aiguille.
Le module de B s'exprime en tesla (T) : dans les gros électro-aimants B est de quelques T, pour les aimants usuels B est de l'ordre de 0,1 à 0,01 T, le champ magnétique terrestre a une composante horizontale voisine de $2 \cdot 10^{-5}$ T.

• Pour décrire l'espace champ magnétique on dessine des lignes de champ magnétique : ce sont des lignes tangentes en chacun de leurs points au vecteur $\vec{B}$ et de même sens que $\vec{B}$.
On constate que les lignes de champ sortent toujours par le pôle nord ou par la face nord de la source.

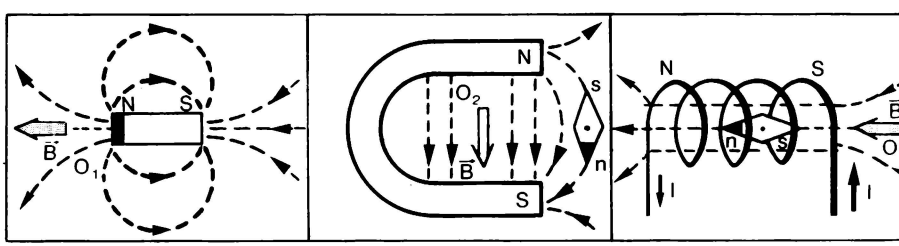
• Si les lignes de champ sont rectilignes, parallèles, alors l'espace champ magnétique est uniforme.

34 Faces d'une bobine.

• Une bobine parcourue par un courant continu se comporte comme un aimant, les lignes de champ sortent par la face nord.
Pour déterminer les faces à partir du sens du courant on peut utiliser la règle de la main droite : les doigts sont placés dans le sens du courant, le pouce indique le sens des lignes de champ (donc le sens de $\vec{B}$, donc le côté face nord).

• Rappelons qu'un pôle (ou une face) repousse un pôle (ou une face) de même nom et attire un pôle (ou une face) de nom contraire.

S 78. *a)*



• Pour l'aimant droit, le pôle nord est connu : les lignes de champ orientées sortent par le pôle nord, le point O_1 étant sur l'axe de symétrie le vecteur champ magnétique en ce point est porté par cet axe et a le sens des lignes de champ.

• Pour l'aimant en U, la petite aiguille aimantée sn, nous permet d'orienter la ligne de champ qui passe par l'aiguille : elle sort par le pôle nord n. Par suite cette ligne de champ sortant par le pôle nord N de l'aimant, nous pouvons préciser le pôle nord N, orienter ensuite les autres lignes de champ magnétique, et dessiner le vecteur $\vec{B}$ en O_2.

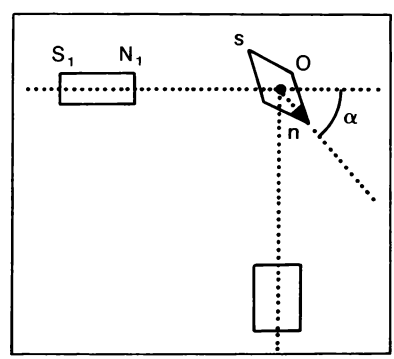
• Pour la bobine, la petite aiguille aimantée sn, nous permet d'orienter la ligne de champ qui passe par l'aiguille : elle sort par le pôle nord n.
Par suite cette ligne sortant par la face nord N de la bobine, nous pouvons préciser cette face, orienter ensuite les autres lignes de champ et dessiner le vecteur $\vec{B}$ en O_3 parallèle à l'axe de symétrie de la bobine.
Grâce à la règle de la main droite, le pouce pointant dans le sens des lignes de champ, les autres doigts nous indiquent le sens du courant.

b) Dans la bobine, l'aiguille aimantée placée à l'intérieur de la source, a son pôle nord qui pointe vers la face nord de la bobine. La loi d'interaction « un pôle nord est attiré par un pôle ou une face de nom contraire » n'est donc valable que si l'on se place à l'extérieur de la source (ce qui est toujours le cas pour les aimants).

c) Un espace champ magnétique est uniforme, c'est-à-dire a le même vecteur champ magnétique en tous ses points, si les lignes de champ magnétique sont rectilignes et parallèles. Ainsi à l'intérieur d'un aimant en U l'espace champ magnétique est uniforme, nous verrons dans le chapitre 7 que c'est aussi le cas à l'intérieur d'une bobine longue.

d) Tacitement nous n'avons pas tenu compte du champ magnétique terrestre, ce dernier de l'ordre de 10^{-5} T, doit donc être négligeable : nous devons éliminer la troisième proposition. Quant à la première proposition elle est aberrante puisque dans les gros électro-aimants le champ magnétique n'atteint que quelques tesla. Il ne reste plus d'acceptable que l'ordre de grandeur 10^{-2} T.

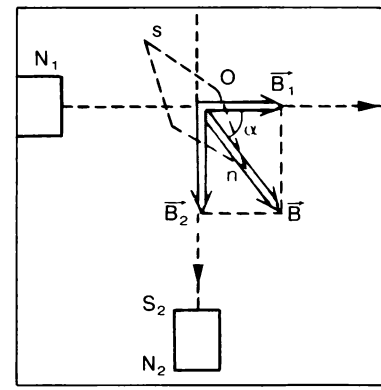
E 79. *On place une aiguille aimantée au point de rencontre* O *des axes de symétrie perpendiculaires de deux aimants droits* S_1N_1 *et* S_2N_2.
On néglige le champ magnétique terrestre. L'aiguille détectrice prend une position d'équilibre stable telle que l'axe sn *fasse l'angle* $\alpha = 50°$ *avec l'axe de symétrie de* S_1N_1 *(voir figure pour la position exacte). Préciser les pôles sud* S_2 *et nord* N_2 *de l'aimant* 2. *Évaluer le rapport* $\frac{B_2}{B_1}$, B_2 *champ magnétique créé en* O *par l'aimant* 2, B_1 *champ magnétique créé en* O *par l'aimant* 1.



S 79. • Présentation de la démarche : le champ magnétique est une grandeur vectorielle, les deux champs $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$ s'ajoutent donc vectoriellement en O; des raisons de symétrie vont nous permettre de connaître les directions de $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$; l'aiguille « détecteur de champ magnétique » en position d'équilibre stable nous permet de préciser la direction et le sens de $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$.

• Le champ magnétique $\vec{B_1}$, représenté à partir de O, est porté par l'axe de symétrie de l'aimant 1, il a le sens de la ligne de champ magnétique qui sort de N_1.

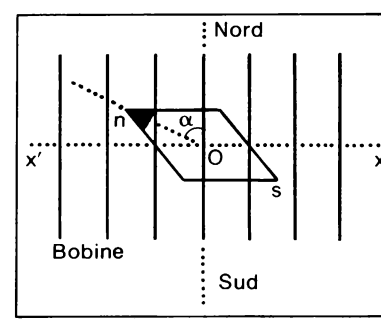
• Le champ magnétique $\vec{B_2}$, représenté à partir de O, est porté par l'axe de symétrie de l'aimant 2.



• Le vecteur champ magnétique résultant $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$ est parallèle à l'axe de l'aiguille sn, il sort par le pôle nord n de sn. Par suite le vecteur $\vec{B_2}$ doit pointer vers l'aimant 2, le pôle sud S_2 est donc du côté de O.

• Comme $\vec{B_1} \perp \vec{B_2}$, puisque les aimants sont disposés de façon que leurs axes de symétrie soient perpendiculaires, l'angle α se retrouve dans un triangle rectangle de côtés égaux à B_1 et à B_2 (et d'hypoténuse égale à B), d'où $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{B_2}{B_1}$. Numériquement le rapport $\dfrac{B_2}{B_1} = \text{tg}\,50° = 1{,}19$.

E 80. *Une bobine a son axe de symétrie x'Ox horizontal, dirigé de l'Ouest vers l'Est. En O, on place une petite aiguille aimantée mobile autour d'un axe vertical passant par son centre d'inertie.*



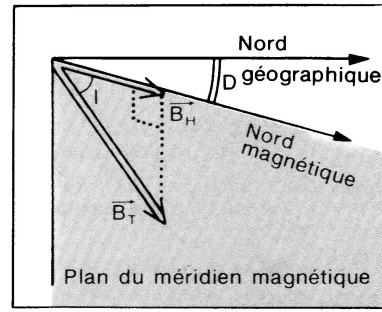
a) *La bobine n'est parcourue par aucun courant. Quelle est la position d'équilibre stable de l'aiguille? (Sur la figure, Nord signifie en fait Nord magnétique, la bobine est vue de dessus.)*

b) *On envoie un courant continu dans la bobine, le pôle nord* n *de l'aiguille pointe vers le Nord-Ouest, faisant avec le Nord l'angle* $\alpha = 68°$.
Déterminer le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ *créé par la bobine en* O.
La composante horizontale du champ magnétique terrestre est $B_H = 2 \cdot 10^{-5}$ T.

c) *Quel est le sens du courant dans la bobine?*

35 **Le champ magnétique terrestre.**

• Dans une zone peu étendue, le champ magnétique terrestre est pratiquement uniforme.



• Le vecteur champ magnétique terrestre $\vec{B}_T$ pointe vers le sol dans l'hémisphère nord, l'angle entre $\vec{B}_T$ et sa composante horizontale $\vec{B}_H$ est l'inclinaison I :

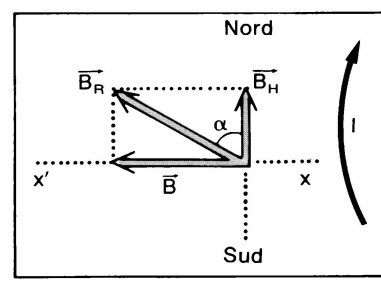
$$B_H = B_T \cos I.$$

• Signalons que $\vec{B}_H$ pointe vers le nord magnétique et que l'angle entre le nord magnétique et le nord géographique est la déclinaison D.

S 80. *a*) Une aiguille mobile autour d'un axe vertical est sensible uniquement à la composante horizontale $\vec{B}_H$ du champ magnétique terrestre : à l'équilibre stable l'aiguille a son pôle nord n qui pointe vers le Nord (magnétique).

b) • Le champ magnétique $\vec{B}$ créé par la bobine est parallèle à x'Ox (car O est sur l'axe de symétrie, nous verrons dans le chapitre 7 que si la bobine est longue, $\vec{B}$ est parallèle à l'axe de symétrie même si O est n'importe où à l'intérieur de la bobine).

• Le champ magnétique résultant $\vec{B}_R = \vec{B} + \vec{B}_H$, l'aiguille s'oriente dans la direction de $\vec{B}_R$ de façon que $\vec{B}_R$ sorte par son pôle nord n, $\vec{B}$ est donc dirigé vers la gauche.



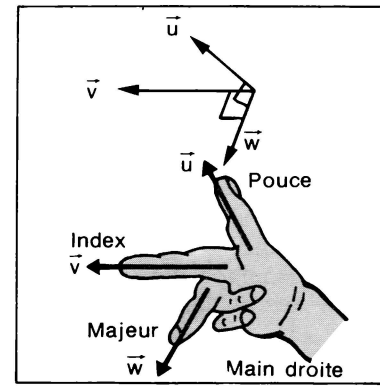
• Comme $\vec{B} \perp \vec{B}_H$, $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{B}{B_H}$, d'où :

$B = B_H \text{ tg } \alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ tg } 68° =$
$4{,}95 \cdot 10^{-5}$ T.

c) D'après la règle de la main droite, le pouce pointant dans le sens de $\vec{B}$, les autres doigts nous indiquent le sens du courant : ce dernier tourne dans le sens des aiguilles d'une montre lorsqu'on regarde, de l'extérieur de la bobine, la face Sud située à droite.

E 81. *On approche un bâton électrisé d'un électroscope chargé, qu'observe-t-on? On approche un aimant d'un électroscope chargé, qu'observe-t-on?*

36 Le produit vectoriel.



• A deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on associe leur produit vectoriel $\vec{W} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ (lire $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$).

• Le vecteur $\vec{W}$ est obtenu par les règles suivantes :

— si $\vec{u} /\!/ \vec{v}$: $\vec{W} = \vec{0}$;

— si $\vec{u}$ n'est pas parallèle à $\vec{v}$:

$\vec{W} \perp \vec{u}$;

$\vec{W} \perp \vec{v}$;

le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{W})$ est direct;

$\|\vec{W}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.

Pour reconnaître qu'un trièdre est direct on peut utiliser la règle des trois doigts de la main droite (voir ci-contre).
(Remarquons que si $\vec{u} \perp \vec{v}$, le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{W})$ est alors trirectangle et direct.)

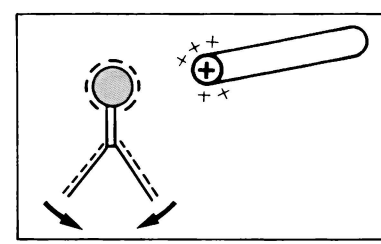
37 La force magnétique (ou force de Lorentz).

Une particule ponctuelle portant la charge q, lancée à la vitesse $\vec{v}$, dans un champ magnétique $\vec{B}$, est soumise à une force magnétique :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

(F en N; |q| en C; v en $m \cdot s^{-1}$; B en tesla T.)

S 81. • Supposons l'électroscope chargé négativement et le bâton électrisé chargé positivement. Une partie des électrons attirés par le bâton remonte vers la boule, les feuilles moins chargées négativement se rapprochent.



• Approchons un aimant du même électroscope chargé négativement. Les électrons statistiquement au repos $(\vec{v} = \vec{0})$, sont baignés dans un champ magnétique $\vec{B}$ (non uniforme) créé par l'aimant. Comme $\vec{v} = \vec{0}$, la force magnétique $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ s'exerçant sur chaque électron est nulle : les feuilles de l'électroscope restent écartées de la même façon qu'avant l'approche de l'aimant.
Retenons donc qu'un champ magnétique ne peut avoir une action que si le corps chargé est en mouvement par rapport à la source du champ.

E 82. *Une particule quasi ponctuelle entre en O dans un espace champ magnétique uniforme caractérisé par le vecteur* $\vec{B}$. *Sa vitesse en O est* $\vec{v_0}$, *non nulle, par rapport à la Terre. La particule continue en mouvement rectiligne et uniforme, « l'effet » de son poids étant négligé. Pourquoi?*

S 82. • La particule en mouvement rectiligne et uniforme, garde le même vecteur vitesse $\vec{v_0}$ par rapport à la Terre.

• Pour que le mouvement soit rectiligne et uniforme, la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v_0} \wedge \vec{B}$ s'exerçant sur la particule doit être constamment nulle.
Deux cas sont possibles :
— la charge de la particule est nulle, dans ce cas $q = 0$ implique que $\vec{F} = \vec{0}$;
— le vecteur vitesse $\vec{v_0}$ est parallèle au vecteur $\vec{B}$, dans ce cas le produit vectoriel $\vec{v_0} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, donc $\vec{F} = \vec{0}$.

E 83. *Une particule quasi ponctuelle se déplace dans un espace champ magnétique (uniforme ou non), la particule porte la charge électrique* q.
On néglige son poids devant la force magnétique. Montrer que le mouvement de la particule est uniforme par rapport à la Terre.

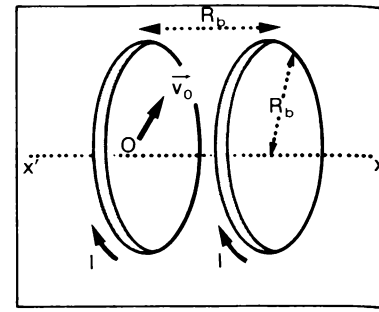
S 83. • Présentation de la démarche : dans un repère lié à la Terre donc pratiquement galiléen, on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique ou bien le théorème du centre d'inertie; la seule force jouant un rôle est la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, cette force n'est pas constante car $\vec{v}$ et $\vec{B}$ peuvent varier d'un point à un autre, mais elle a la particularité d'être constamment perpendiculaire à $\vec{v}$.

• Première solution : appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre deux instants t_1 et t_2, $E_{c_2} - E_{c_1} = W_{\vec{F}}$.
Comme $\vec{F} \perp \vec{v}$, la puissance de $\vec{F}$ $\mathcal{P}_F = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$, elle est constamment nulle, donc $W_{\vec{F}} = 0$. (On peut dire aussi que la force magnétique $\vec{F}$, perpendiculaire au déplacement, ne travaille pas.)
Par suite $E_{c_2} - E_{c_1} = 0$: la vitesse v de la particule reste constante, le mouvement est uniforme.

• Deuxième solution : appliquons le théorème du centre d'inertie, à chaque instant $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$.
Comme $\vec{F} \perp \vec{v}$, $\vec{a} \perp \vec{v}$: le vecteur $\vec{a}$ se confond avec le vecteur accélération normale $\vec{a_N}$, le vecteur accélération tangentielle $\vec{a_T}$ est donc constamment nul, le mouvement est uniforme (revoir $\mathcal{M}$ 4).

$\mathcal{M}$ 38	Retenons le résultat important précédent : Un champ magnétique ne peut modifier la vitesse, donc l'énergie cinétique, d'une particule (il ne peut ni l'accélérer, ni la freiner).

E 84. *Deux bobines plates identiques, parallèles, de rayon* R_b, *situées à la distance* R_b *l'une de l'autre, parcourues par des courants de mêmes intensité et sens, délimitent un espace où le champ magnétique* $\vec{B}$ *est pratiquement uniforme, parallèle à l'axe x'x des deux bobines. (Ce dispositif s'appelle les bobines de Helmholtz.)*



a) *Quel est le sens du vecteur* $\vec{B}$?

b) *Soit O un point situé entre les deux bobines. Un électron (charge* $q = -e$, *masse* $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg*) est lancé de O, par un canon à électrons, avec le vecteur vitesse* $\vec{v_0}$ *perpendiculaire à x'x, donc à* $\vec{B}$. *L'électron décrit un cercle de rayon* $R = 7$ cm. *Expliquer.*
En déduire v_0 *sachant que* $B = 10^{-3}$ T.

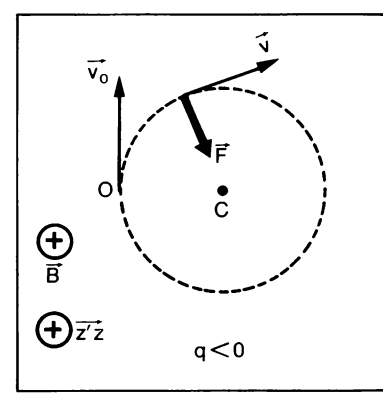
c) *Quelle est la période du mouvement?*

S 84. *a)* D'après la règle de la main droite (revoir ℳ 32), les doigts étant orientés dans le sens des courants, le pouce dressé indique le sens du champ magnétique $\vec{B}$: ce dernier, parallèle à x'x, est dirigé de x vers x'.

b) • Montrons que la trajectoire de la particule chargée, lancée à la vitesse $\vec{v_0} \perp \vec{B}$ est circulaire et uniforme. Il faut savoir faire parfaitement cette démonstration très classique.

• Présentation de la démarche : on applique le théorème du centre d'inertie; en choisissant un axe parallèle à $\vec{B}$ on montre d'après les coordonnées cartésiennes de $\vec{a}$ et $\vec{v_0}$ sur x'x que le mouvement est plan, on en déduit que l'angle $(\vec{v}, \vec{B})$ est toujours étal à 90°; on montre que le mouvement est uniforme, on en déduit que v reste égal à v_0; enfin en utilisant les coordonnées curvilignes on en déduit que le rayon de courbure R de la trajectoire est constant; la trajectoire plane de rayon de courbure constant est donc un cercle.

• Appliquons, dans le repère laboratoire, le théorème du centre d'inertie à la particule chargée (ici un électron de charge q négative). Cette particule est soumise à la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ et à son poids négligeable devant $\vec{F}$. D'où :



$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

• Considérons l'axe z'z, d'origine O, parallèle à $\vec{B}$. Prenons l'instant de passage en O comme origine des dates. L'état de mouvement initial de la particule suivant z'z est caractérisé par $z_0 = 0$, et par $\dot{z}_0 = 0$ puisque $\vec{v_0} \perp \vec{z'z}$.
D'après (1), $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, donc à $\vec{z'z}$, par suite $\ddot{z} = 0$ quel que soit t. On en déduit, en intégrant, $\dot{z} = C^{te} = \dot{z}_0 = 0$, puis $z = C^{te} = z_0 = 0$: la particule reste dans le plan $z = 0$ pris comme plan de la figure.

Conséquence : le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la particule reste constamment perpendiculaire à $\vec{B}$, $|\sin(\vec{v}, \vec{B})| = 1$.

• D'après (1), $\vec{a} \perp \vec{v}$. Donc $\vec{a}$ se confond avec le vecteur accélération normale $\vec{a_N}$, le vecteur accélération tangentielle $\vec{a_T} = \dot{v}\,\vec{T}$ (revoir $\mathcal{M}$ 3) est toujours nul : le mouvement est uniforme (revoir E 55 une autre démonstration possible par le théorème de l'énergie cinétique).

• Exploitons que $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$ se confond avec $\vec{a_N} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$ en désignant par R le rayon de courbure de la trajectoire.

En module $\frac{|q|}{m} v \cdot B\,|\sin(\vec{v}, \vec{B})| = \frac{v^2}{R}$, soit en tenant compte que $|\sin(\vec{v}, \vec{B})| = 1$ et que $v = v_0$:

$$\frac{|q|}{m} v_0 B = \frac{v_0^2}{R}.$$

Le rayon de courbure $R = \frac{mv_0}{|q|B}$ est donc constant.

• La trajectoire est plane, son rayon de courbure R est constant : c'est donc un cercle de rayon R, tangent en O à $\vec{v_0}$ (voir E 85 pour le tracer).

• Application numérique : $v_0 = \frac{|q|B}{m} R = 1{,}24 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-1}$.

c) • La période du mouvement est le temps T nécessaire à l'électron pour faire un tour. Le mouvement étant uniforme :

$$T = \frac{\text{circonférence du cercle}}{v_0} = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi \frac{mv_0}{|q|Bv_0} = \frac{2\pi m}{|q|B}.$$

Remarquons que la période est indépendante de v_0.

• Numériquement $T = 3{,}53 \cdot 10^{-8}\ s = 35{,}3\ ns$ (revoir $\mathcal{M}$ 26 pour les sous-multiples).

$\mathcal{M}$ 39 **Mouvement d'une particule chargée lancée à $\vec{v_0} \perp \vec{B}$.**

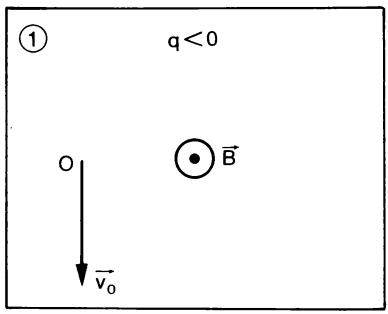
Il est nécessaire de savoir refaire le raisonnement du S 84 *b*). Dans certains problèmes le résultat peut être admis, mémorisons-le :

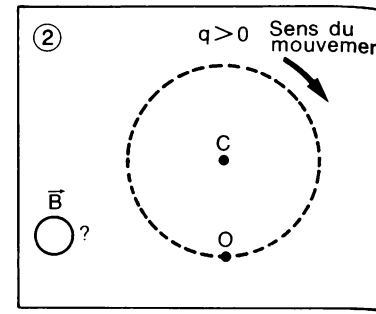
une particule chargée, lancée dans un champ magnétique uniforme à la vitesse $\vec{v_0}$ perpendiculaire à $\vec{B}$, a un mouvement circulaire uniforme de rayon :

$$\mathbf{R = \frac{mv_0}{|q|B} = \frac{p}{|q|B}}$$

(p désignant le module de la quantité de mouvement de la particule, ce module restant constant et égal à p_0).

E 85. *L'espace champ magnétique uniforme est de dimensions suffisamment grandes pour que les particules chargées, lancées de O à la vitesse $\vec{v_0}$, perpendiculairement au champ magnétique $\vec{B}$, décrivent un cercle complet.*





a) *Dessiner le cercle trajectoire dans l'expérience* ①.

b) *Préciser le vecteur vitesse $\vec{v_0}$ et le sens de $\vec{B}$ dans l'expérience* ②.

c) *Vérifier que le cercle est bien tracé dans* S 84.

S 85. Présentation de la démarche : une particule chargée, lancée en O dans un champ magnétique uniforme, à la vitesse $\vec{v_0}$ perpendiculaire à $\vec{B}$, décrit un cercle dont le plan contient $\vec{v_0}$ tracé à partir de O et est perpendiculaire à $\vec{B}$; il suffit ensuite d'exploiter le fait que la force magnétique en O, $\vec{F_0} = q\vec{v_0} \wedge \vec{B}$, est centripète puisque le mouvement est circulaire et uniforme.

a) Dans l'expérience ①, $\vec{F_0} = q\vec{v_0} \wedge \vec{B}$ est :
— perpendiculaire à $\vec{B}$, donc est dans le plan de la figure;

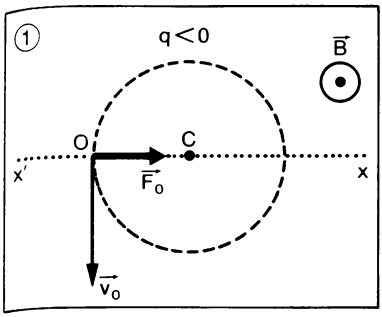
— est perpendiculaire à $\vec{v_0}$, donc à la direction x'x (voir figure ci-après);

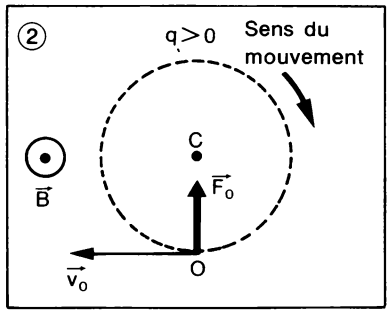
— son sens est tel que le trièdre (trirectangle ici) $(q\vec{v_0}, \vec{B}, \vec{F_0})$ soit direct. On peut utiliser la règle des trois doigts de la main droite (revoir ℳ 36) : le pouce pointe dans le sens de $q\vec{v_0}$ c'est-à-dire dans le sens opposé à $\vec{v_0}$ puisque $q<0$, l'index dans le sens de $\vec{B}$, le majeur indique le sens de $\vec{F_0}$. On trouve que $\vec{F_0}$ est vers la droite.

Le centre du cercle, C, se trouve donc sur x'x, à droite de O, puisque $\vec{F_0}$ est centripète.

b) Dans l'expérience ②, le vecteur vitesse en O, $\vec{v_0}$, est tangent en O au cercle trajectoire et il a le sens du mouvement.

La force magnétique en O, $\vec{F_0} = q\vec{v_0} \wedge \vec{B}$, centripète, peut être tracée.
Pour déterminer le sens de $\vec{B}$, perpendiculaire au plan du cercle, on utilise le fait que le trièdre $(q\vec{v_0}, \vec{B}, \vec{F_0})$ est direct. La règle des trois doigts de la main droite peut être utilisée : le pouce pointe dans le sens de $q\vec{v_0}$, donc de $\vec{v_0}$ puisque $q>0$, le majeur dans le sens de $\vec{F_0}$, l'index nous indique le sens de $\vec{B}$. On trouve que $\vec{B}$ vient vers l'avant de la feuille.





E 86. *Un proton animé de la vitesse* $\vec{v_0}$, *parallèle à* $\overrightarrow{Ox}$, *pénètre en* O *dans une région où règne un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *perpendiculaire au plan* xOz.

a) *Dessiner la trajectoire du proton pour* $x>0$. *On justifiera la forme et la position de celle-ci.*

b) *Calculer le rayon de cette trajectoire.*

c) *Calculer l'abscisse* x_1 *à laquelle le vecteur* $\vec{v}$ *fait avec* $\overrightarrow{Ox}$ *un angle égal à* 45°. *Quelle est alors la grandeur* v *de la vitesse?*

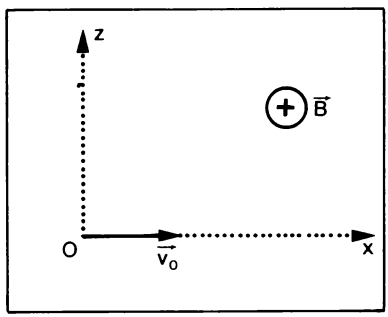
Données : vitesse du proton en O :

$$v_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

champ magnétique : $B = 4 \cdot 10^{-2}$ T

masse du proton : $m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ *kg*

charge du proton : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.



(D'après bac)

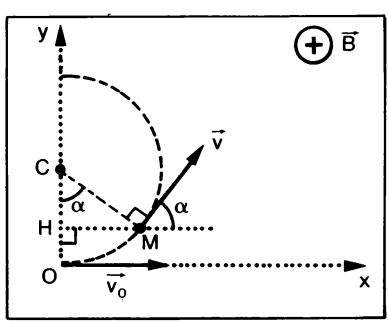
S 86. *a*) • On reproduira la démonstration du S 84, *b*) pour montrer que le mouvement est circulaire et uniforme.

• On expliquera comme dans S 85, comment tracer le cercle trajectoire, plus exactement le demi-cercle puisqu'on se limite à $x>0$.

b) D'après la théorie développée au *a*) :

$$R = \frac{mv_0}{|q|B} = 5{,}31 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

c) • Le vecteur vitesse $\vec{v}$, en M, est perpendiculaire au rayon du cercle CM. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ fait avec $\overrightarrow{Ox}$ un angle α égal à 45°, lorsque CM fait avec CO un angle $\alpha = 45°$.

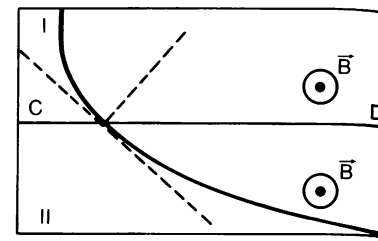


Dans le triangle rectangle CHM, $\sin\alpha = \frac{HM}{CM}$, par suite :

$$x_1 = HM = R \sin\alpha = 5{,}31 \cdot 10^{-2} \sin 45° = 3{,}75 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

• Le mouvement étant uniforme, le vecteur vitesse $\vec{v}$ garde un module constant égal à $v_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

E 87. *Une particule de charge* q, *de masse* m, *traverse une chambre de Wilson dans laquelle règne un champ magnétique* $\vec{B}$ *uniforme, perpendiculaire au plan de la figure et orienté vers l'avant de ce plan. La particule ralentit en franchissant la surface* CD.
Le cliché matérialisant la trajectoire permet de dire que la particule a décrit deux arcs de cercles de rayons r_1 *et* r_2 *respectivement dans les parties* I *et* II.



a) *Établir l'expression de* r_1 *et* r_2 *en fonction de* q, m, B *et des vitesses respectives* v_1 *et* v_2 *de la particule. Dans quel sens se déplace la particule (de* I *vers* II *ou de* II *vers* I*)?*

b) *Quel est le signe de la charge de la particule? Justifier la réponse.*

c) *Calculer la charge massique* $\frac{|q|}{m}$ *de la particule et identifier-la.*

On donne : — $r_1 = 14$ cm; $r_2 = 42$ cm;
— *intensité du champ magnétique* $B = 0{,}5$ T;
— *vitesse d'entrée dans le dispositif* $v = 2 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
— *masse d'un électron* $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg;
— *masse du proton* $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg;
— *charge élémentaire* $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(D'après bac)

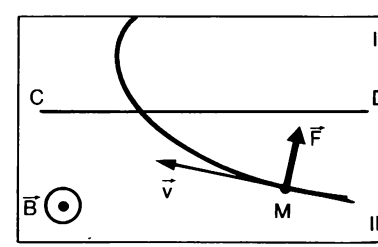
S 87. *a)* • Établir (ne pas hésiter à le faire pour s'entraîner, revoir éventuellement S 84, *b*)) que $r_1 = \frac{mv_1}{|q|B}$ et $r_2 = \frac{mv_2}{|q|B}$. Par suite $\frac{r_2}{r_1} = \frac{v_2}{v_1}$ (1).

• D'après la trajectoire on constate que la trajectoire dans la zone II est plus tendue : $r_2 > r_1$ (ceci est confirmé par les données situées en fin d'énoncé). D'après (1), il s'ensuit que $v_2 > v_1$.

• En franchissant CD, la particule ralentit : après CD la vitesse est donc plus faible, c'est v_1. La particule passe donc de II vers I.

b) • Soit M un point de la trajectoire. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ en M est tangent à l'arc de cercle considéré, il a le sens du mouvement.

• La force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est centripète : elle est dirigée perpendiculairement à $\vec{v}$ vers l'intérieur de la trajectoire.



• Le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ doit être direct.
D'après la règle des trois doigts de la main droite : l'index pointant dans le sens $\vec{B}$, le majeur dans le sens $\vec{F}$, le pouce nous indique le sens de $q\vec{v}$. On constate que $q\vec{v}$ a le sens de $\vec{v}$, par suite la charge q est positive.

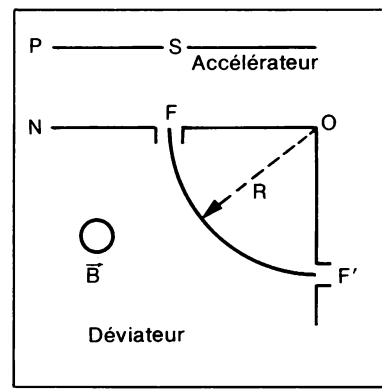
c) • La vitesse d'entrée dans le dispositif n'est autre que v_2. D'après $r_2 = \dfrac{mv_2}{|q|B}$, on en déduit $\dfrac{|q|}{m} = \dfrac{v_2}{r_2 B} = 9{,}52 \cdot 10^7\ C \cdot kg^{-1}$.

• Pour le proton le rapport $\dfrac{|q|}{m} = \dfrac{e}{m_p} = 9{,}58 \cdot 10^7\ C \cdot kg^{-1}$, il semble donc que la particule soit un proton.

E 88. *Des ions positifs* $^{14}_{7}N^+$ *de masse* m *sensiblement égale à* 14 u (u est l'unité de masse atomique, $1\ u = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg), *porteurs d'une charge élémentaire* +e, *pénètrent avec une vitesse pratiquement nulle dans l'accélérateur par le trou* S. *Ils sont accélérés par une différence de potentiel réglable* $U = V_P - V_N > 0$ *établie entre les plaques* P *et* N.
Ils parviennent à la fente F. *Le poids d'un ion sera négligé devant les autres forces s'appliquant à l'ion.*

a) *Exprimer la vitesse* v_F *d'un ion passant par* F *en fonction de* e, m *et* U.

b) *A la sortie de* F, *les ions pénètrent dans le déviateur magnétique où règne un champ magnétique uniforme* $B = 0{,}3$ T *perpendiculaire au vecteur vitesse des ions (voir figure).*
Les ions sont assujettis à parcourir dans le déviateur un quart de cercle de rayon R = 5 cm, *de centre* O, *pour être détectés par la fente* F'.



α) *Quel doit être le sens de* $\vec{B}$?

β) *Exprimer le rapport* $\dfrac{e}{m}$ *en fonction de* U, B *et* R.

γ) *Quelle est la tension accélératrice* U_1 *nécessaire pour faire passer par le collecteur* F' *les ions* $^{14}_{7}N^+$?

δ) *En réglant* U *à la valeur* $U_2 = 718$ V, *on collecte en* F' *des ions* $^{A}_{7}N^+$ *de masse* Au. *Déterminer le nombre entier* A.

(D'après bac)

S 88. *a*) Réponse : $$v_F = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \qquad (1)$$

b) α) Réponse : $\vec{B}$ pointe vers l'arrière du plan de la figure (revoir S 85).

β) • Les ions lancés à la vitesse $\vec{v_F}$, perpendiculaire au champ magnétique uniforme $\vec{B}$, ont un mouvement circulaire et uniforme. Le rayon de la trajectoire circulaire est $R = \dfrac{mv_F}{eB}$ (dans ce problème la démonstration n'est pas explicitement demandée).

• Remplaçons v_F par son expression (1) :

$$R = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Élevons au carré :

$$R^2 = \frac{m^2}{e^2B^2}\cdot\frac{2eU}{m}.$$

Après simplification $R^2 = \frac{2mU}{eB^2}$, d'où $\frac{e}{m} = \frac{2U}{R^2B^2}$.

γ) • $U_1 = \frac{R^2B^2e}{2m_1}$ avec $m_1 = 14$ u.

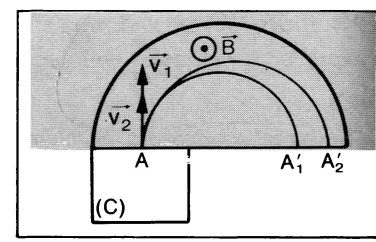
• Numériquement $U_1 = \frac{(5\cdot10^{-2})^2 \times 0{,}3^2 \times 1{,}6\cdot10^{-19}}{2 \times 14 \times 1{,}67\cdot10^{-27}} = 770$ V.

δ) • La masse de ${}^{A}_{7}N^{+}$ est $m_2 = Au$.

Comme $U_2 = \frac{R^2B^2e}{2m_2}$, il s'ensuit que $A = \frac{R^2B^2e}{2U_2u}$.

• Numériquement $A \simeq 15{,}0$, comme A est un entier $A = 15$. L'ion a donc pour formule ${}^{15}_{7}N^{+}$.

E 89. *(Principe d'un spectrographe de masse.)*
Une source donne naissance à des ions hélium de deux sortes, les ions ${}^{3}_{2}He^{2+}$ *de masse* $m_1 = 3$ u (u, *unité de masse atomique, vaut* $1{,}67\cdot10^{-27}$ kg) *et les ions* ${}^{4}_{2}He^{2+}$ *de masse* $m_2 = 4$ u. *Pour séparer ces ions, on utilise le dispositif expérimental ci-contre. Les ions, de vitesse initiale nulle, sont soumis dans la chambre* C *à une tension accélératrice* U_0. *Ils traversent un petit trou* A *avec les vitesses* $\vec{v_1}$ (*pour* ${}^{3}_{2}He^{2+}$) *et* $\vec{v_2}$ (*pour* ${}^{4}_{2}He^{2+}$) *perpendiculaires à* AA'_1 *et sont soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *orthogonal aux vecteurs* $\vec{v_1}$ *et* $\vec{v_2}$ *et à* AA'_1 *(l'espace champ magnétique est représenté en gris sur la figure).*



a) *Évaluer les vitesses* v_1 *et* v_2 *en fonction de* e, U_0, m_1 *et* m_2. *Que vaut le rapport* $\frac{v_1}{v_2}$?

b) *Sous l'action du champ magnétique les noyaux d'hélium décrivent des trajectoires circulaires dont on précisera, sans démonstration, les rayons* R_1 *et* R_2. *Évaluer le rapport* $\frac{R_1}{R_2}$.

c) A'_1 *étant le point d'impact des ions* ${}^{3}_{2}He^{2+}$, A'_2 *celui des ions* ${}^{4}_{2}He^{2+}$, *évaluer la distance* $A'_1A'_2$. *Application numérique :* $U_0 = 10^4$ V, $B = 1$ T.

(D'après bac)

§ 89. *a*) Réponses : $v_1 = \sqrt{\dfrac{4eU_0}{m_1}}$; $v_2 = \sqrt{\dfrac{4eU_0}{m_2}}$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1{,}15.$$

b) Réponses : $R_1 = \dfrac{m_1 v_1}{2eB}$; $R_2 = \dfrac{m_2 v_2}{2eB}$;

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}866.$$

c) • La distance AA_1' est le diamètre du demi-cercle trajectoire de $^3_2He^{2+}$, $AA_1' = 2R_1$.

De même $AA_2' = 2R_2$.

Par suite $A_1'A_2' = 2(R_2 - R_1) = \dfrac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{eB}$.

D'après le *a*) $m_1 v_1 = m_1\sqrt{\dfrac{4eU_0}{m_1}} = \sqrt{4eU_0 m_1}$,

de même $m_2 v_2 = \sqrt{4eU_0 m_2}$.

Donc $A_1'A_2' = \dfrac{\sqrt{4eU_0 m_2} - \sqrt{4eU_0 m_1}}{eB} = \dfrac{2\sqrt{U_0}\cdot(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})}{B\sqrt{e}}$.

• Numériquement $A_1'A_2' = 5{,}47 \cdot 10^{-3}$ m.

E 90. a) *Des deutons (noyaux d'atomes de deutérium* $^2_1H^+$*) sont accélérés dans le vide par une différence de potentiel* U *s'exerçant entre deux plaques parallèles* P_1 *et* P_2. *Ils sont émis en un point* O_1 *de* P_1 *avec une vitesse négligeable, ils traversent* P_2 *par le trou* O_2 *tel que* O_1O_2 *soit perpendiculaire à* P_1 *et à* P_2. *Soit* $\vec{v_0}$ *leur vecteur vitesse en* O_2. *Ils pénètrent alors dans un domaine où règne un champ magnétique uniforme, orthogonal à* $\vec{v_0}$.

α) *Démontrer que la trajectoire est circulaire de rayon* R. *La représenter sur un schéma en indiquant la direction et le sens des vecteurs* $\vec{v_0}$ *et* $\vec{B}$.

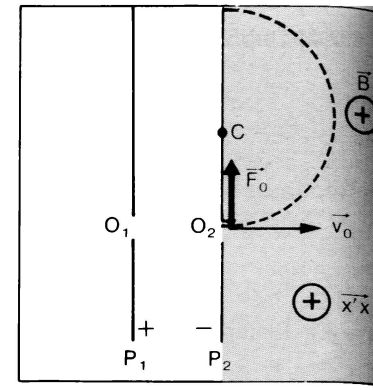
β) *Quelle est la valeur de* v_0?

γ) *Sous quelle différence de potentiel* U *les deutons ont-ils été accélérés?*
Application numérique : masse du deuton $m = 2$ u
$1\text{ u} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg
charge élémentaire $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C
valeur du champ magnétique $B = 2{,}00 \cdot 10^{-1}$ T
rayon de la trajectoire $R = 5{,}00 \cdot 10^{-2}$ m.

b) *La même expérience est refaite avec un mélange de deutons et d'hélions (noyaux d'atomes d'hélium* $^4_2He^{2+}$, *de masse* $m' = 4$ u). *Peut-on distinguer les trajectoires des deux sortes de particules?*

(D'après bac)

S 90. *a*) (Refaisons encore une fois ensemble la démonstration importante présentée en S 84, *b*).)



• Le repère est le dispositif lié à la Terre, donc quasi galiléen.

• Un deuton est soumis à la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ et à son poids que nous négligeons devant $\vec{F}$.

• D'après le théorème du centre d'inertie :

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \quad \text{soit} \quad \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}. \qquad (1)$$

• Montrons que le mouvement est plan. Pour cela considérons un axe x'x parallèle à $\vec{B}$, d'origine O_2. Choisissons la date $t = 0$ pour le passage du deuton en O_2. Suivant x'x, l'état de mouvement initial est caractérisé par $x_0 = 0$ et $\dot{x}_0 = 0$ puisque $\vec{v_0} \perp \vec{x'x}$.
A tout instant, d'après (1), $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, donc à x'x; par suite $\ddot{x} = 0$. Par intégration il s'ensuit que $\dot{x} = C^{te} = \dot{x}_0 = 0$, puis $x = C^{te} = x_0 = 0$. Le deuton reste donc dans le plan $x = 0$ pris comme plan de la figure. En conséquence, le vecteur vitesse $\vec{v}$ restera toujours perpendiculaire au vecteur $\vec{B}$.

• Montrons que le mouvement est uniforme. La force magnétique $\vec{F}$ est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$, sa puissance $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ est constamment nulle, son travail est nul. L'énergie cinétique du deuton ne varie donc pas : le mouvement est uniforme, v reste égal à v_0.

• Montrons que le rayon de courbure R de la trajectoire est constant.

Puisque $\vec{a} \perp \vec{v}$, $\vec{a}$ se confond avec le vecteur accélération normale $\vec{a_N} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$ (2).

D'après (1) et (2) $$\frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{v^2}{R}\vec{N}.$$

En module $$\frac{|q|}{m} v \cdot B \left|\sin(\vec{v}, \vec{B})\right| = \frac{v^2}{R}.$$

Comme $\vec{v} \perp \vec{B}$, $\left|\sin(\vec{v}, \vec{B})\right| = 1$. De plus $v = v_0$ et $q = e$.

Il s'ensuit que $$R = \frac{mv_0}{eB} = C^{te}.$$

• La trajectoire plane, ayant un rayon de courbure constant, est circulaire.

• Pour représenter la trajectoire, il suffit de déterminer son centre C : la force magnétique $\vec{F_0}$, en O_2, représentée à partir de O_2, pointe vers C puisqu'elle est centripète.
Le trièdre $(q\vec{v_0}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct. D'après la règle des trois doigts de la main droite, le pouce pointant dans le sens de $q\vec{v_0}$, donc de $\vec{v_0}$ puisque $q = +e$, l'index pointant dans le sens de $\vec{B}$, le majeur indique le sens de $\vec{F_0}$ (voir figure).

β) La vitesse $v_0 = \dfrac{eBR}{m} = 4{,}79 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Remarquons que l'énoncé présente les données avec deux chiffres significatifs (revoir éventuellement Pourquoi du chapitre 2), il faut écrire les réponses de la même façon.

γ) C'est l'accélérateur constitué par le condensateur (P_1, P_2) qui communique la vitesse v_0 aux deutons.
D'après le théorème de l'énergie cinétique, appliqué à un deuton, dans le repère dispositif, $Ec_{O_2} - Ec_{O_1} = W_{\vec{F}'}$, en désignant par $\vec{F}'$ la force électrique. Le travail $W_{\vec{F}'} = q(V_{O_1} - V_{O_2}) = e(V_{P_1} - V_{P_2}) = eU$.

Comme $Ec_{O_1} = 0$, $Ec_{O_2} = \dfrac{1}{2} mv_0^2 = eU$ (3).

D'où la tension accélératrice $U = \dfrac{mv_0^2}{2e} = 2{,}39 \cdot 10^3$ V.

b) • L'hélion $^4_2He^{2+}$ a pour masse $m' = 2$ m, pour charge $q' = +2e$ (il a même charge massique que le deuton).

• En fin d'accélérateur l'hélion a pour vitesse v_0' telle que :

$$\frac{1}{2} m'v_0'^2 = q'U = 2eU.$$

D'où $v_0'^2 = \dfrac{4eU}{m'}$, comme $m' = 2$ m, $v_0' = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$.

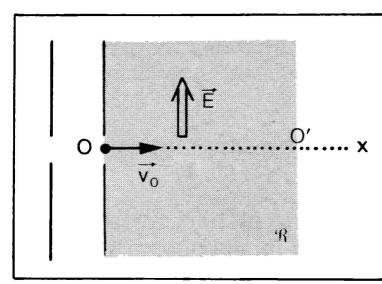
D'après (3), $v_0 = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$. Par suite $v_0' = v_0$: les deutons et les hélions ont la même vitesse v_0 en O_2.

• Les hélions prennent une trajectoire circulaire de rayon :

$$R' = \frac{m'v_0'}{|q'|B} = \frac{2mv_0}{2eB} = \frac{mv_0}{eB} = R.$$

Les demi-cercles ont même rayon, sont tous les deux tangents en O_2 à $\vec{v_0}$, ont leur centre sur P_2 du même côté de O_2 : ils sont donc confondus.

E 91. *Des particules électrisées pénètrent avec la vitesse* $\vec{v_0}$ *dans une région* $\mathcal{R}$ *(en gris sur la figure) où règnent un champ électrique uniforme* $\vec{E}$ *perpendiculaire à* $\vec{v_0}$ *et un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *(non représenté sur la figure) perpendiculaire à* $\vec{v_0}$ *et à* $\vec{E}$. *Les particules traversent* $\mathcal{R}$ *sans être déviées.*



a) *Montrer que le mouvement est rectiligne uniforme.*

b) *En déduire comment doit être orienté* $\vec{B}$ *par rapport à* $\vec{v_0}$ *et à* $\vec{E}$ *(d'avant en arrière ou d'arrière en avant sur la figure) pour que les particules puissent traverser* $\mathcal{R}$ *sans être déviées?*

c) *Quelle doit être la valeur de* $\vec{v_0}$ *sachant que* $E = 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ *et* $B = 10^{-2}$ T.

d) *Les résultats précédents dépendent-ils de la valeur absolue et du signe de la charge q des particules?*

e) *Les particules qui arrivent dans* $\mathcal{R}$ *ont en fait des vecteurs vitesse de même direction que* $\vec{v_0}$ *mais de module pas forcément égal à* v_0. *Que fait une particule de charge positive, de vitesse* $v_1 > v_0$? *Plus généralement que font les particules de vitesse* $v \neq v_0$?

(D'après bac)

S 91. *a*) Une particule pendant la traversée de $\mathcal{R}$ est soumise à la force électrique $\vec{F'} = q\vec{E}$, à la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ et à son poids que nous négligerons.
Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre O et O' :

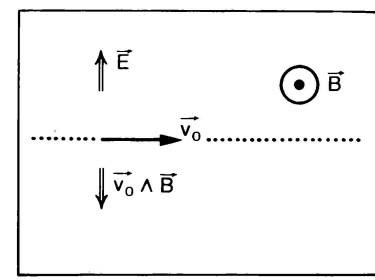
$$Ec_{O'} - Ec_O = W_{\vec{F}'} + W_{\vec{F}}.$$

$W_{\vec{F}} = 0$ parce que la force magnétique $\vec{F}$ est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse (la puissance de $\vec{F}$, $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ est constamment nulle).
La force $\vec{F'}$ étant constante, son travail $W_{\vec{F}'} = q\vec{E} \cdot \overrightarrow{OO'}$. Comme $\overrightarrow{OO'} \perp \vec{E}$, $W_{\vec{F}'} = 0$.
Par suite $Ec_{O'} - Ec_O = 0$: le mouvement rectiligne est donc aussi uniforme. La particule a constamment un vecteur vitesse égal à $\vec{v_0}$.

b) • Le vecteur accélération $\vec{a}$ de la particule est constamment nul puisque le mouvement est rectiligne et uniforme (revoir $\mathcal{M}$ 7). D'après le théorème du centre d'inertie, le repère étant le dispositif lié à la Terre donc pratiquement galiléen, $\vec{F'} + \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$.
D'où $q\vec{E} + q\vec{v_0} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ (1). En simplifiant par q :

$$\vec{E} + \vec{v_0} \wedge \vec{B} = \vec{0}. \qquad (2)$$

• Le vecteur $\vec{v_0} \wedge \vec{B}$ doit être opposé à $\vec{E}$. Le trièdre $(\vec{v_0}, \vec{B}, \vec{v_0} \wedge \vec{B})$ est direct. On peut donc en déduire le sens de $\vec{B}$, d'après la règle des trois doigts de la main droite : le pouce pointant dans le sens de $\vec{v_0}$, le majeur dans le sens de $\vec{v_0} \wedge \vec{B}$, l'index indique le sens de $\vec{B}$. On trouve que $\vec{B}$ est dirigé d'arrière en avant sur la figure.



c) D'après (2) les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{v_0} \wedge \vec{B}$ doivent avoir des modules égaux :

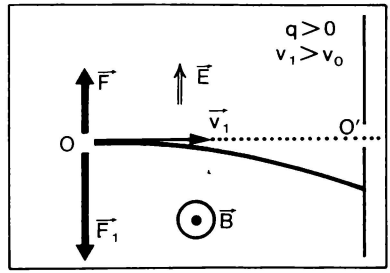
$$E = v_0 B \quad (\text{en remarquant que } |\sin(\vec{v_0}, \vec{B})| = 1).$$

La vitesse v_0 des particules non déviées est donc $v_0 = \dfrac{E}{B} = \dfrac{10^3}{10^{-2}} = 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

d) Dans le *b*), nous avons simplifié par q l'expression (1) : la condition trouvée est donc indépendante de la charge q de la particule.

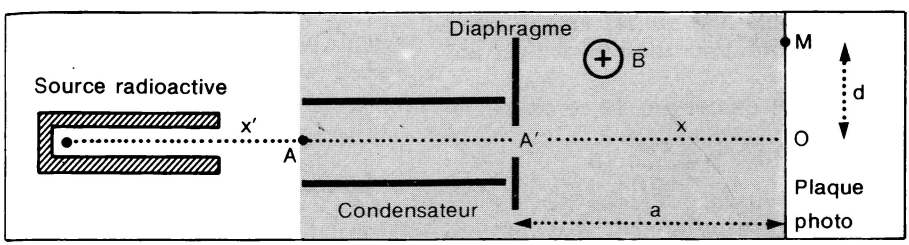
e) • Une particule de charge positive, de vitesse $v_1 > v_0$ est soumise en O à deux forces : $\vec{F'} = q\vec{E}$ et $\vec{F_1} = q\vec{v_1} \wedge \vec{B}$.

Ces deux forces sont représentées sur la figure. Le module de $\vec{F_1}$, égal à qv_1B, est supérieur à qv_0B c'est-à-dire à $qE = F'$: la force magnétique l'emporte pour une telle particule. On observera une déviation dans le sens de $\vec{F_1}$.



• Plus généralement seules les particules de vitesse v_0 pourront continuer en ligne droite. Pour arrêter les autres il suffit de mettre un diaphragme présentant un trou en O' : on réalise alors un filtre de vitesse d'où ne sortent que les particules de même vecteur vitesse $\vec{v_0}$.

E 92. *Une source radioactive placée dans un tube où règne le vide, émet, suivant* x'x, *un rayonnement, constitué de particules chargées identiques, passant entre les plaques horizontales d'un condensateur plan.*
En l'absence de champ électrique ou magnétique, le rayonnement frappe perpendiculairement en O *une plaque photographique distante de la fin du condensateur de* $a = 0{,}5$ m.
On soumet alors le rayonnement à l'action simultanée du champ électrique vertical $\vec{E}$, *localisé dans le condensateur, et d'un champ magnétique* $\vec{B}$ *horizontal perpendiculaire à* x'x, *orienté d'avant en arrière. Ce champ magnétique s'applique dans toute la partie en gris sur le schéma.*



a) *Déterminer le sens du vecteur champ électrique et son intensité* E *en fonction de* v *et* B *pour que les particules électrisées pénétrant en* A *dans le condensateur avec une vitesse* $\vec{v}$, *colinéaire à* x'x, *ne soient pas déviées et sortent par* A'.

b) *Le faisceau horizontal homocinétique (les particules ont toutes le même vecteur vitesse* $\vec{v}$*) sortant alors par* A' *du filtre de vitesse, reste soumis à l'action du champ magnétique. Il vient frapper la plaque photographique en un point* M *tel que* OM = d.

α) *Rappeler, sans démonstration, les caractéristiques du mouvement des particules entre* A' *et* M.

β) *Montrer qu'on peut évaluer la charge massique des particules* $\frac{|q|}{m}$ *en fonction de* d, a, E *et* B. (*On montrera d'abord que le rayon du cercle trajectoire* $R = \frac{d^2 + a^2}{2d}$, *sinon on admettra cette formule.*)

γ) *Le point* M *est vers le haut comme sur la figure;* $d = 0{,}1$ m; $B = 0{,}32$ T; $E = 6{,}4 \cdot 10^6$ m·s^{-1}. *Quel est le signe de* q?
Évaluer la charge massique des particules.

Les particules chargées émises peuvent à priori être des électrons, des positrons, des particules α ou hélions, quel est le type de particules émises?

électron : *masse* $9{,}1\cdot10^{-31}$ kg, *charge* $-1{,}6\cdot10^{-19}$ C;
positron : *masse* $9{,}1\cdot10^{-31}$ kg, *charge* $+1{,}6\cdot10^{-19}$ C;
particule α : *masse* $6{,}64\cdot10^{-27}$ kg, *charge* $+3{,}2\cdot10^{-19}$ C.

(D'après bac)

S 92. *a*) (On ne donne que des indications et la réponse.)

• Montrer en appliquant le théorème de l'énergie cinétique que les particules en mouvement rectiligne gardent le même vecteur vitesse $\vec{v}$ (voir S 91, *a*)).

• Montrer en appliquant le théorème du centre d'inertie que :

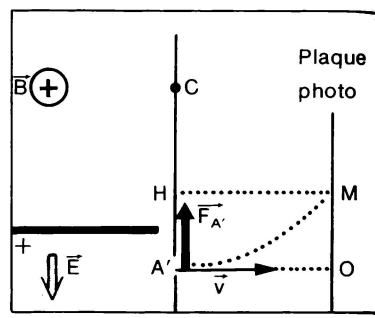
$$\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}=\vec{0} \quad \text{(voir S 91, } b\text{)}.$$

• Le vecteur $\vec{E}$ est donc opposé au vecteur $\vec{v}\wedge\vec{B}$. Ce dernier est de sens tel que le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{v}\wedge\vec{B})$ soit direct : $\vec{v}\wedge\vec{B}$ est dirigé verticalement vers le haut, par suite $\vec{E}$ est vertical, vers le bas. (Le plateau + est donc le plateau supérieur.)

• Le module de $\vec{E}$ est égal au module de $\vec{v}\wedge\vec{B}$, d'où :

$$E=vB \quad (\text{remarquons que } |\sin(\vec{v}, \vec{B})|=1 \text{ car } \vec{v}\perp\vec{B}).$$

b) α) • Les particules lancées de A′, à la vitesse $\vec{v}$ perpendiculaire au champ magnétique uniforme $\vec{B}$, décrivent un arc de cercle A′M qui les amène sur la plaque photo. Leur mouvement est uniforme.



Le rayon R de cet arc de cercle est :

$$R=\frac{mv}{|q|B}.$$

β) • Soit H la projection de M sur A′C, C étant le centre de l'arc de cercle.
A′H = OM = d.
D'où HC = A′C − AH = R − d.
Dans le triangle rectangle CHM, d'après le théorème de Pythagore :

$$CM^2=CH^2+HM^2 \quad \text{soit} \quad R^2=(R-d)^2+a^2.$$

Après simplification

$$R=\frac{d^2+a^2}{2d}.$$

• Comme $R=\dfrac{mv}{|q|B}$ et $v=\dfrac{E}{B}$, il s'ensuit :

$$\frac{mE}{|q|B^2}=\frac{d^2+a^2}{2d} \quad \text{soit} \quad \frac{|q|}{m}=\frac{2dE}{B^2(d^2+a^2)}.$$

γ) • Si M est vers le haut, c'est que la force magnétique en A′ centripète, est dirigée vers le haut. Comme $\vec{F}_{A'}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$, le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F}_{A'})$ est direct, on en déduit (par exemple en utilisant la règle des trois doigts de la main droite) que le vecteur $q\vec{v}$ est dirigé dans le sens de $\vec{v}$, donc que q est positif.

• Numériquement $\frac{|q|}{m} = 4{,}81 \cdot 10^7\ C \cdot kg^{-1}$.

• La particule positive ne peut être qu'un positron ou qu'une particule α, pour le positron $\frac{|q|}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}\ C \cdot kg^{-1}$, pour la particule α $\frac{|q|}{m} = 4{,}82 \cdot 10^7\ C \cdot kg^{-1}$.
La source radioactive émet donc des particules α.

E 93. *Une particule chargée, en mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v_0}$, pénètre dans un domaine D de l'espace où règne, suivant le cas, soit un champ électrique $\vec{E}$, soit un champ magnétique $\vec{B}$, tous deux uniformes. On admettra que le poids de la particule est négligeable devant la force électrique ou la force magnétique, que les lois de la mécanique newtonienne sont valables.*
Pour les quatre situations

① $\vec{E} /\!/ \vec{v_0}$
② $\vec{E} \perp \vec{v_0}$
③ $\vec{B} \perp \vec{v_0}$
④ $\vec{B} /\!/ \vec{v_0}$

répondre aux questions suivantes :

a) *La particule a-t-elle une accélération $\vec{a}$ non nulle? Si oui, donner son expression en fonction de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ et des caractéristiques de la particule et de son mouvement.*

b) *L'énergie cinétique de la particule varie-t-elle? (Les réponses doivent être justifiées.)*

c) *La trajectoire reste-t-elle rectiligne ou est-elle modifiée par la présence du champ $\vec{E}$ ou $\vec{B}$? (Aucun calcul n'est demandé.)*

(D'après bac)

S 93. *a)* • Dans un repère lié au dispositif, pratiquement galiléen, on applique le théorème du centre d'inertie. On désigne par $\vec{F'}$ la force électrique, par $\vec{F}$ la force magnétique :

— Cas ① et ② : $\vec{F'} = q\vec{E} = m\vec{a}$, $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ (le vecteur $\vec{a}$ est constant).

— Cas ③ : soit $\vec{v}$ le vecteur vitesse à un instant t, au même instant $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$, $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$ (le vecteur $\vec{a}$ varie avec $\vec{v}$).

— Cas ④ : cette question n'est pas facile à expliquer rigoureusement.

• Souvent on se contente de dire que l'accélération initiale $\vec{a_0} = \frac{q}{m}\vec{v_0} \wedge \vec{B}$ est nulle puisque $\vec{v_0}$ est parallèle à $\vec{B}$ (revoir ℳ 36), donc le vecteur vitesse ne change pas, et ainsi de suite de proche en proche. A un instant t, $\vec{v}$ restant égal à $\vec{v_0}$, $\vec{a}$ reste nul.

• On peut aussi dire que l'expérience nous montre que le mouvement est alors rectiligne : $\vec{v}$ reste parallèle à $\vec{B}$, $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$ reste constamment nul.

b) Dans un repère lié au dispositif, pratiquement galiléen, on applique le théorème de l'énergie cinétique entre deux instants :
— Cas ① et ② : $Ec_2 - Ec_1 = W_{F'}$. Le travail $W_{F'}$ n'est pas nul, l'énergie cinétique varie.

— Cas ③ et ④ : $Ec_2 - Ec_1 = W_F$. Comme $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse, sa puissance $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ est constamment nulle, donc $W_{\vec{F}} = 0$. Par suite $Ec_2 = Ec_1$, l'énergie cinétique reste constante (le mouvement est uniforme).

c) — Dans le cas ①, la force électrique $\vec{F'} = q\vec{E}$ est parallèle à la vitesse initiale, la trajectoire est rectiligne (le mouvement est uniformément varié).
— Dans le cas ②, la force électrique $\vec{F'}$ est perpendiculaire à $\vec{v_0}$: la trajectoire est un arc de parabole, tangent à $\vec{v_0}$, dont le plan est parallèle à $\vec{v_0}$ et à $\vec{E}$.
— Dans le cas ③, la particule lancée à $\vec{v_0}$ perpendiculaire à $\vec{B}$ décrit un cercle ou un arc de cercle (à vitesse constante), tangent à $\vec{v_0}$, dont le plan est perpendiculaire à $\vec{B}$.
— Dans le cas ④, nous l'avons déjà dit dans le *a*), la trajectoire est rectiligne : le mouvement est rectiligne et uniforme.

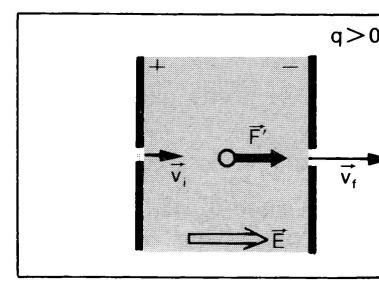
E 94. *On dispose d'une source de champ magnétique uniforme* S *et d'une source de champ électrique uniforme* S'. *On utilise soit* S, *soit* S'.

a) *On veut réaliser un accélérateur, que doit-on utiliser? Faire un schéma correspondant à l'accélération de particules positives de vitesse initiale* $\vec{v_i}$.

b) *On veut réaliser un «déviateur parfait» (c'est-à-dire qui dévie sans changer la vitesse), que doit-on utiliser? Faire un schéma, toujours pour des particules positives, sur lequel on indiquera l'angle de déviation* α.

S 94. Présentation des forces magnétique et électrique agissant sur une particule ponctuelle chargée :
— la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, elle dépend de $\vec{v}$;
— la force électrique $\vec{F'} = q\vec{E}$, elle est constante (dans un champ uniforme bien sûr).

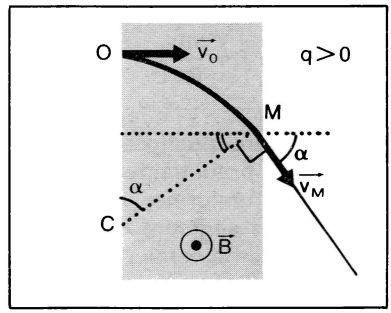
a) • La force magnétique $\vec{F}$ est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$, sa puissance $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ est constamment nulle, elle ne travaille pas. Par suite elle ne peut modifier l'énergie cinétique d'une particule : la source S ne peut pas être utilisée pour réaliser un accélérateur.



• La force électrique $\vec{F'}$ travaille : elle peut modifier l'énergie cinétique d'une particule. Si on veut qu'il y ait accélération des particules sans déviation, il faut choisir $\vec{F'}$ parallèle à $\vec{v_i}$, de même sens que $\vec{v_i}$. Le mouvement est alors rectiligne uniformément accéléré. (Sur la figure, l'espace champ électrique dû à S' est la zone grise.)

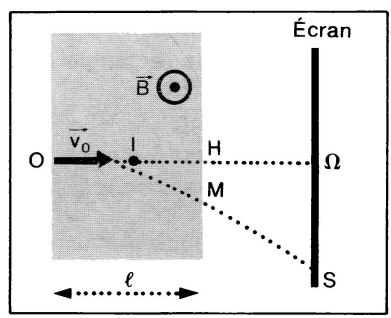
b) • Si la particule est lancée à une vitesse $\vec{v_0}$ dans un champ électrique $\vec{E}$, non parallèle à $\vec{v_0}$, la particule prend un mouvement parabolique. Elle est déviée. Cependant son énergie cinétique varie (de façon plus ou moins importante), le déviateur n'est donc pas « parfait », au sens donné par l'énoncé.

• Si la particule est lancée à une vitesse $\vec{v_0}$ perpendiculaire à $\vec{B}$, la particule prend un mouvement circulaire uniforme. Elle est déviée, son énergie cinétique ne varie pas. Avec S, on peut donc réaliser un « déviateur parfait ».



• Sur la figure ci-contre l'espace champ magnétique dû à S est limité par la zone grise : de O à M le mouvement est circulaire uniforme $\left(\text{centre C, rayon } R = \frac{mv_0}{|q|\,B}\right)$; après M, « l'effet » du poids de la particule étant négligé, le mouvement est rectiligne et uniforme. L'angle de déviation α est l'angle entre $\vec{v_0}$ et $\vec{v_M}$. Comme $\vec{v_M}$ est tangent à l'arc de cercle OM, en M, $\vec{v_M}$ est perpendiculaire à CM : on retrouve l'angle α en C.
Remarque : Si le vecteur $\vec{v_0}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{B}$, la trajectoire n'est plus plane, c'est une hélice.

E 95. *Des noyaux d'hélium* $^4_2He^{2+}$ *animés de la vitesse horizontale* $\vec{v_0}$, *de module* $v_0 = 10^6\ m \cdot s^{-1}$, *pénètrent en* O *dans un espace champ magnétique uniforme de vecteur* $\vec{B}$ *perpendiculaire à* $\vec{v_0}$, *de module* $B = 10^{-2}$ T. *Cet espace s'étend sur une distance* $OH = \ell = 0{,}1$ m *comptée parallèlement à* $\vec{v_0}$.



a) *Rappeler l'expression du rayon* R *de la trajectoire* OM *suivie par les noyaux. Calculer* R, *la masse d'un noyau est* $m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg, *la charge est* $+2e$.

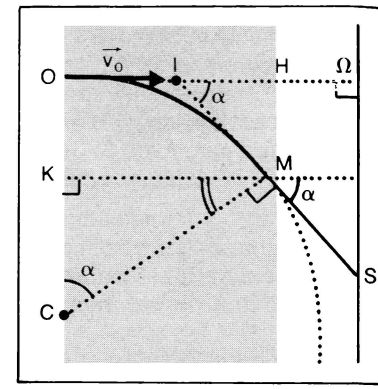
b) *Donner l'expression de la déviation angulaire* α, *en radians. On supposera* α *suffisamment petit pour assimiler* $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$, *et* α *exprimé en radian. Calculer* α *en radian et en degré.*

c) *On reçoit les noyaux d'hélium sur un écran fluorescent, placé perpendiculairement à* $\vec{v_0}$. *La distance entre* Ω *et le milieu* I *de* OH *est* $D = 50$ cm.
Donner l'expression de ΩS, *en désignant par* S *le point d'impact des noyaux sur l'écran, dans le cas de* α *petit. On admettra qu'alors la tangente* MS *passe pratiquement par* I. *Vérifier que* ΩS *est proportionnel à* B. *Calculer numériquement* ΩS.

(D'après bac)

S 95. *a*) • Les noyaux d'hélium lancés à la vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire au champ magnétique uniforme décrivent à vitesse constante un arc de cercle OM, tangent en O à $\vec{v}_0$, dont le plan est perpendiculaire à $\vec{B}$, de rayon $R = \frac{mv_0}{|q|B} = \frac{mv_0}{2eB}$, de centre C.

• Le rayon $R = \frac{mv_0}{2eB} = 2{,}075$ m.



b) • Après M, « l'effet » du poids des noyaux étant négligeables, les noyaux continuent pratiquement en mouvement rectiligne uniforme (finalement $v_S = v_M = v_0$). Le segment de droite, tangent en M à l'arc de cercle, est donc perpendiculaire à CM.

• Soit K la projection de M sur CO. La déviation angulaire α, se retrouve en C dans le triangle KCM, rectangle en K.

Dans ce triangle $\sin \alpha = \frac{KM}{CM} = \frac{\ell}{R}$.

Dans le cas où ℓ est très inférieur à R (disons 10 fois plus petit), sin α est petit devant 1, on peut assimiler sin α et α en rad.

D'où $$\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{2\ell eB}{mv_0}.$$

• Numériquement $\alpha = 4{,}82 \cdot 10^{-2}$ rad $= 2{,}76°$. (Ne pas oublier que $180° = \pi$ rad.)

c) • Lorsque α est petit, la tangente MS passe pratiquement par le milieu I de OH. (Justification simple : IM = IO car les deux tangentes IO et IM sont symétriques par rapport à CI. Si α est petit IH $\simeq$ IM, par suite IH $\simeq$ IO.)

• Dans le triangle rectangle IΩS, on retrouve l'angle de déviation α en I.

Par suite $\text{tg}\,\alpha = \frac{\Omega S}{I\Omega}$, $\quad \Omega S = I\Omega \text{ tg } \alpha = D \text{ tg } \alpha$.

Si α est petit, tg $\alpha \simeq \sin \alpha \simeq \alpha$ (rad), d'où :

$$\Omega S = D\alpha = \frac{D\ell}{R} = \frac{2\ell eD}{mv_0} B.$$

On constate que ΩS est proportionnel à B.

• Numériquement $\Omega S = 2{,}41 \cdot 10^{-2}$ m $= 2{,}41$ cm.

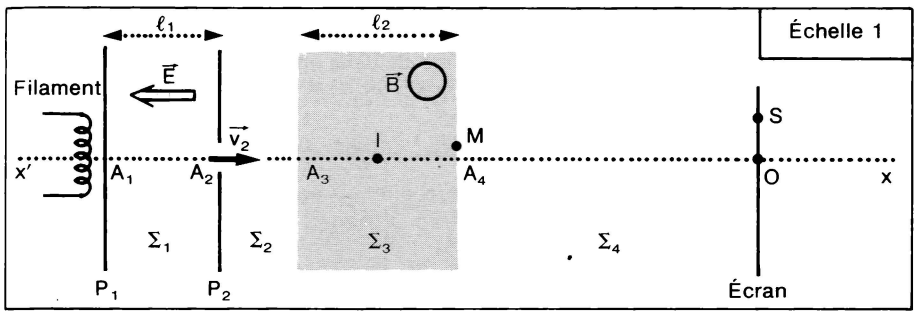
40 Cas des petits angles.

Certains énoncés ne donnent pas toujours les formules d'approximation suivantes valables pour un angle α petit exprimé en radian (disons inférieur à 0,1 rad) :

$$\textbf{tg } \alpha \simeq \textbf{sin } \alpha \simeq \alpha \textbf{ (rad)}$$

$$\textbf{cos } \alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

E 96. *Le montage schématisé est placé dans le vide. Des électrons partent de* P_1 *pratiquement à vitesse nulle. On distingue 4 zones :*
— Σ_1 : *espace champ de pesanteur et espace champ électrique uniforme* $\vec{E}$, *horizontal, parallèle à* x'x;
— Σ_2 *et* Σ_4 : *espaces champ de pesanteur;*
— Σ_3 : *espace champ de pesanteur et espace champ magnétique uniforme* $\vec{B}$, *horizontal, perpendiculaire à* x'x, *de sens non indiqué.*



a) *Préciser sans calcul, en indiquant seulement les approximations nécessaires, la nature du mouvement des électrons dans chaque zone.*

b) *Les électrons arrivent en* S *sur l'écran :*
— *Quel est le sens de* $\vec{B}$?
— *Quel est la déviation angulaire* α? (OS = 5 mm; $\ell_1 = 1{,}5$ cm; $\ell_2 = 2$ cm; I, *milieu de* A_3A_4, *est tel que* IO = D = 5 cm).

c) *Construire la trajectoire des électrons en expliquant la construction.*

d) *Exprimer* OS *en fonction de* ℓ_1, ℓ_2, D, E, B, e *et de la masse* m *d'un électron. Calculer* B *sachant que* $E = 10^{+5}\ V \cdot m^{-1}$; $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

S 96. (Il s'agit d'un exercice récapitulatif, nous ne donnons que quelques indications et les réponses.)

a) Dans Σ_1, négliger $\vec{P} = m\vec{g}$ devant $\vec{F'} = -e\vec{E}$, mouvement rectiligne uniformément accéléré.
Dans Σ_2 et Σ_4, négliger « l'effet » de $\vec{P}$: mouvements pratiquement rectilignes uniformes.
Dans Σ_3, négliger $\vec{P}$ devant $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$, mouvement circulaire uniforme car $\vec{v_3}$, en A_3, est perpendiculaire à $\vec{B}$.

b) • Sens de $\vec{B}$: de l'arrière vers l'avant de la feuille.

• Soit MS le segment de droite dans Σ_4, les électrons étant peu déviés car OS est petit devant IO = D, MS passe pratiquement par I (revoir S 95, *c*)). Par suite $\alpha = \dfrac{OS}{D} = 0{,}1 \text{ rad} = 5{,}7°$.

c) • De A_1 à A_3 trajectoire rectiligne.

• Tracer ensuite MS partie de IS limitée à Σ_4.

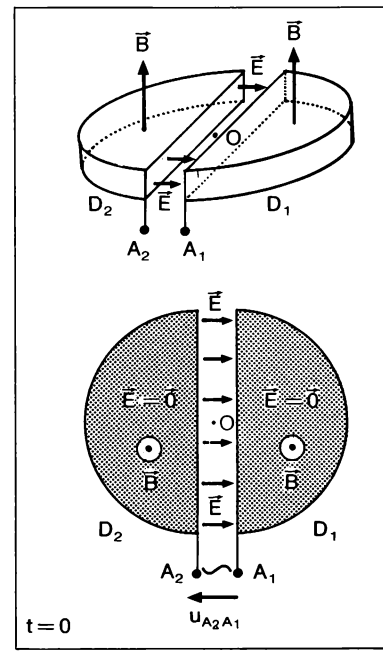
• Enfin tracer l'arc de cercle A_3M, dans Σ_3, tangent en A_3 à A_1A_3 et en M à MS.

d) • $v_2 = \sqrt{\frac{2eE\ell_1}{m}}$; $v_3 = v_2$; $R = \frac{mv_3}{eB}$; $\alpha = \frac{\ell_2}{R}$ (revoir S 95 *b)*); $OS = D\alpha$.

On trouvera $OS = D\ell_2 B \sqrt{\frac{e}{2mE\ell_1}}$.

• Numériquement $B = \frac{OS}{D\ell_2}\sqrt{\frac{2mE\ell_1}{e}} = 6{,}5 \cdot 10^{-4}$ T.

E 97. *(Le cyclotron.)*
Pour communiquer à un proton une vitesse élevée dans un espace restreint, on utilise les actions successives d'un champ électrique $\vec{E}$ *et d'un champ magnétique* $\vec{B}$, *dans l'appareil suivant placé dans le vide.*
Deux demi-cylindres (ou dees) conducteurs, creux, identiques D_1 *et* D_2, *sont légèrement écartés l'un de l'autre.*
On établit entre D_1 *et* D_2, *une différence de potentiel sinusoïdale* $u_{A_2A_1} = U \cos 2\pi Nt$ ($U = 10^5$ V). *Elle fait naître dans l'espace compris entre* D_1 *et* D_2 *un champ électrique* $\vec{E}$ *uniforme dans l'espace, variable dans le temps.*



D_1 *et* D_2 *sont placés dans un champ magnétique* $\vec{B}$, *uniforme et constant, dont la direction est parallèle à l'axe des demi-cylindres, et de module* $B = 1$ T. *On peut considérer que* $\vec{E}$ *est constamment nul à l'intérieur des dees et que* $\vec{B}$ *ne règne qu'à l'intérieur des dees.*

a) *Un proton est placé initialement au voisinage du centre O de l'appareil, à vitesse pratiquement nulle à la date* $t = 0$. *A ce même instant* $u_{A_2A_1}$ *est maximal, égal à* U. *Décrire le mouvement du proton :*

α) *entre* D_1 *et* D_2, *on supposera que pendant la durée très brève du mouvement du proton entre* D_1 *et* D_2, $u_{A_2A_1}$ *reste égal à* U;

β) *à l'intérieur de* D_1. *Quelle est la durée de ce dernier mouvement?*

b) *Quelle doit être la fréquence minimale* N *de* $u_{A_2A_1}$ *pour que le proton soit de nouveau accéléré à sa sortie de* D_1 *sous la tension* U? *On néglige les temps de passage dans l'intervalle entre les dees. Dans ces conditions, quel sera le mouvement ultérieur du proton?*

c) *Quelle est l'énergie cinétique transmise au proton à chaque tour?*

d) *A quelle énergie cinétique maximale le proton sort-il du cyclotron sachant que le rayon maximal d'extraction est* $R_{max} = 0{,}3$ m? *On l'évaluera en* J *et en* MeV.

e) *Évaluer le nombre de tours effectués par le proton avant sa sortie.*
Données :
— *masse du proton* $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg;
— *charge du proton* $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C;
— *la mécanique newtonienne reste applicable au proton.*

(D'après bac)

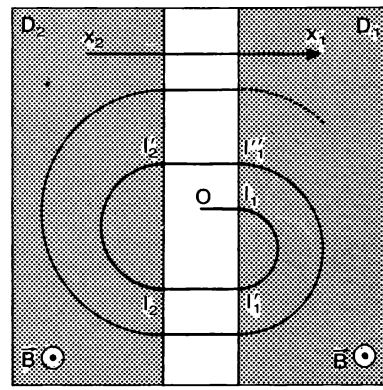
S 97. *a*) α) *Le mouvement entre* O *et* D_1.

Comme $u_{A_2A_1} = V_{A_2} - V_{A_1} = U > 0$, le champ électrique $\vec{E}$ est parallèle à x_2x_1, a le sens D_2 vers D_1, a pour module $E = \dfrac{U}{d}$ en désignant par d la distance entre les deux dees (c'est ce qui est représenté sur la figure de l'énoncé dessinée à $t = 0$).

Le proton subit la force électrique $\vec{F} = e\vec{E}$ (devant laquelle nous négligeons son poids).

Cette force a le sens de $\vec{E}$, elle est pratiquement constante.

Comme le proton part de O sans vitesse, son mouvement est rectiligne suivant le segment OI_1. Son accélération $\vec{a} = \dfrac{e\vec{E}}{m}$ a le sens de $\vec{E}$, elle est pratiquement constante : le proton a donc un mouvement rectiligne uniformément accéléré.



En I_1 le proton a la vitesse v_1 telle que, d'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \overrightarrow{W_F} = e\vec{E}\cdot\overrightarrow{OI_1} = e\,\frac{U}{d}\times\frac{d}{2} = \frac{eU}{2}\cdot$$

D'où : $v_1 = \sqrt{\dfrac{eU}{m}} = \sqrt{\dfrac{1{,}6\cdot10^{-19}\times10^5}{1{,}67\cdot10^{-27}}}$

$= 3{,}1\cdot10^6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

β) *Le mouvement à l'intérieur de* D_1.

• Le proton est lancé à la vitesse $\vec{v_1}$ perpendiculaire au champ magnétique uniforme $\vec{B}$:

— il reste dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ passant par I_1 (ce plan est pris comme plan de figure);

— il a un mouvement uniforme, sa vitesse reste égale à v_1;

— il décrit un demi-cercle $\overset{\frown}{I_1I'_1}$, de rayon $R_1 = \dfrac{mv_1}{eB} = 3{,}23\cdot10^{-2}\ \text{m} = 32{,}3\ \text{mm}$.

• Pour effectuer ce demi-cercle, le proton met la durée t :

$$t = \frac{2\pi R_1}{v_1} = \frac{2\pi mv_1}{v_1eB} = \frac{2\pi m}{eB} = 6{,}56\cdot10^{-8}\ \text{s} = 65{,}6\ \text{ns}.$$

b) • Dans le calcul précédent on constate que la durée du parcours dans un dee est $t = \dfrac{2\pi m}{eB}$: elle est indépendante de la vitesse (donc du rayon de la trajectoire), elle sera donc la même pour tous les demi-cercles effectués dans les dees.

Si l'on veut que le proton soit accéléré « sous la tension U », à chaque fois qu'il traverse la coupure, il faut que $u_{A_2A_1}$ passe d'une valeur maximale $+U$ à une valeur minimale $-U$ tous les temps $t = \dfrac{2\pi m}{eB}$. Par suite, en appelant T la période de $u_{A_2A_1}$, t doit être égal à un nombre impair de demi-périodes : $t = (2k+1)\dfrac{T}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

La fréquence $N = \frac{1}{T}$ de $u_{A_2A_1}$ est telle que $\frac{2\pi m}{eB} = (2k+1)\frac{1}{2N}$, d'où $N = (2k+1)\frac{eB}{4\pi m}$. La fréquence minimale qui convient est donnée par $k = 0$; c'est $N = \frac{eB}{4\pi m} = 7{,}62 \cdot 10^6$ Hz $= 7{,}62$ MHz.

• Pour cette fréquence de $u_{A_2A_1}$, le proton est accéléré « sous la tension U » de I_1' à I_2, il arrive dans D_2 à la vitesse $v_2 > v_1$, il y décrit un demi-cercle $\overset{\frown}{I_2 I_2'}$ de rayon $R_2 > R_1$: il est à nouveau accéléré de I_2' à I_1'' « sous la tension U », etc...

c) A chaque tour le proton subit deux accélérations « sous tension U ». Il reçoit donc le travail positif de la force électrique 2eU. Son énergie cinétique augmente de $\Delta E_c = 2eU$.

Numériquement $\Delta E_c = 3{,}2 \cdot 10^{-14}$ J $= \frac{3{,}2 \cdot 10^{-14}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 2 \cdot 10^5$ eV.

d) • Lors du dernier demi-cercle, juste avant sa sortie du cyclotron, le rayon de la trajectoire est R_{max}. La vitesse est alors telle que $R_{max} = \frac{mv_{max}}{eB}$ d'où $v_{max} = \frac{eBR_{max}}{m}$.

• L'énergie cinétique maximale du proton est donc :

$$E_{c,\,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{e^2 B^2 R_{max}^2}{2m}.$$

Numériquement $E_{c,\,max} = 6{,}90 \cdot 10^{-13}$ J $= 4{,}31 \cdot 10^6$ eV $= 4{,}31$ MeV.

e) Une évaluation n'est pas un calcul rigoureux : il est donc inutile de tenir compte de la phase de lancement de O à I_1 qui a lieu avant « qu'on se mette à compter les tours ».
A chaque tour l'énergie cinétique augmente de $\Delta E_c = 3{,}2 \cdot 10^{-14}$ J, pour porter cette énergie à $E_{c,\,max} = 6{,}90 \cdot 10^{-13}$ J, il faut grossièrement :

$$n = \frac{6{,}90 \cdot 10^{-13}}{3{,}2 \cdot 10^{-14}} \simeq 21{,}5 \text{ tr.}$$

Remarques :
— le temps pour passer de O à la sortie du cyclotron est grossièrement $n \times \frac{4\pi m}{eB} \simeq 2{,}8 \cdot 10^{-6}$ s $= 2{,}8$ μs;

— la vitesse maximale atteinte par le proton $v_{max} = \frac{eBR_{max}}{m} = 2{,}87 \cdot 10^7$ m·s^{-1}, elle est inférieure à $\frac{c}{10}$, ce qui confirme que les lois de la mécanique newtonienne étaient applicables.

POURQUOI ?

• *Pourquoi le pôle nord d'un aimant s'oriente t-il vers le Nord?*

Nous avons dit que si l'on est à l'extérieur de la source magnétique un pôle nord s'oriente vers un pôle ou une face de nom contraire. Si on assimile la Terre à un énorme aimant droit, ce qui est un modèle assez grossier, lorsqu'on place en son voisinage une aiguille mobile, on est bien à l'extérieur de la source « aimant-Terre ». C'est donc un pôle sud magnétique que « l'aimant-Terre » présente au voisinage de son pôle nord géographique.

• *Pour déterminer le sens de* $\vec{B}$ *à l'aide d'une aiguille détectrice (ou exploratrice) aimantée de pôles* s *et* n, *j'ai une règle : «* $\vec{B}$ *a le sens de* $\overrightarrow{sn}$ *lorsque l'aiguille s'équilibre», pourquoi ne la donnez-vous pas?*

Nous avons choisi de dire « $\vec{B}$ sort par le pôle nord n de l'aiguille détectrice en position d'équilibre stable ». Cette règle est en effet générale : elle s'applique aussi bien à l'aiguille détectrice du champ qu'à la source du champ (par exemple le champ crée par un aimant en U sort par son pôle nord N).
Au contraire votre règle ne s'applique pas aux sources magnétiques : ainsi il est faux de dire que le champ à l'intérieur d'un aimant en U, de pôles N et S, a le sens $\overrightarrow{SN}$.
C'est pour éviter ce piège que nous ne citons pas « votre » règle.

• *Faut-il obligatoirement utiliser les règles de la main droite et des trois doigts de la main droite?*

Nous avons choisi de ne donner dans ce cours que deux règles (*M* 32 et *M* 36) énoncées de façon à s'adapter à diverses situations : insistons bien sur le fait qu'elles doivent être appliquées avec la main droite.
Si vous connaissez très bien d'autres règles (bonhomme d'Ampère, du S, du tire-bouchon ...) rien ne vous empêche de les utiliser.

• *Je me suis fait piéger dans* E 86 : *j'ai utilisé les coordonnées cartésiennes pour déterminer la forme de la trajectoire et j'ai fait une démonstration totalement fausse. Pourquoi ne peut-on pas raisonner en coordonnées cartésiennes comme dans les champs de pesanteur ou électrique uniformes?*

• Pour l'étude du mouvement d'une particule électrisée dans un champ magnétique uniforme (mouvement où le vecteur $\vec{a}$ n'est pas constant) on utilise une solution hybride :
— en exploitant le théorème du centre d'inertie en coordonnées cartésiennes sur un axe parallèle à $\vec{B}$, on montre que le mouvement s'effectue dans un plan (P);
— en l'exploitant en coordonnées curvilignes dans (P) on montre que le mouvement est circulaire et uniforme.

• Faire toute la démonstration en coordonnées cartésiennes conduit à des difficultés mathématiques: d'abord déterminer les coordonnées de $\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$ en fonction des coordonnées de $\vec{v}$ et $\vec{B}$, ensuite ces coordonnées n'étant pas constantes résoudre des équations différentielles (c'est-à-dire comportant des dérivées, première et seconde dans ce cas) compliquées.

• *Dans* S 87, *je ne suis pas convaincu : ce n'est pas parce que la charge massique* $\frac{q}{m}$ *évaluée est voisine de celle du proton que l'on peut conclure que la particule est un proton!*

Tacitement quand un énoncé demande d'identifier une particule, c'est qu'on admet que la particule fait obligatoirement partie de la liste proposée. (Dans E 87, la liste proposée figure dans les données finales : électron ou proton. Dans E 92 la « règle du jeu » est bien mieux précisée.)

• *Si j'ai bien compris il n'y a pas de rapport entre trièdre direct et trièdre trirectangle, pourriez-vous le repréciser?*

Un trièdre (O, x, y, z) est trirectangle si les axes sont perpendiculaires deux à deux (Ox ⊥ Oy, Ox ⊥ Oz et Oy ⊥ Oz).
Un trièdre (O, x, y, z) est direct si l'orientation des axes est bien choisie : en appliquant la règle des trois doigts de la main droite, Ox doit pointer suivant le pouce, Oy suivant l'index, Oz suivant le majeur. Dans un produit vectoriel $\vec{W} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{W})$ est direct, $\vec{W} \perp \vec{u}$ et $\vec{W} \perp \vec{v}$; mais $\vec{u}$ n'est pas forcément perpendiculaire à $\vec{v}$. Si $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$, alors le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{W})$ est trirectangle et direct.

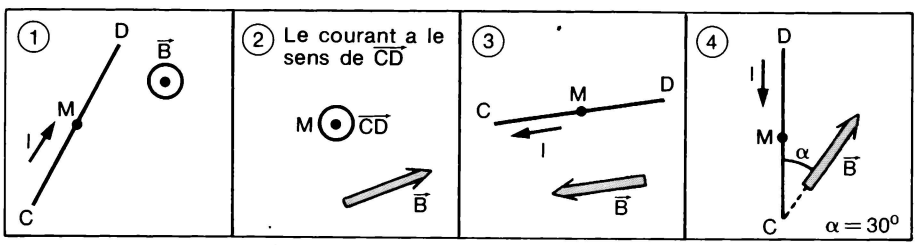
• *Pour un filtre de vitesse (espace dans lequel se superposent des champs électrique et magnétique croisés de façon à ce que les particules de vitesse convenable ne soient pas déviées), peut-on se contenter de dire que la force magnétique et la force électrique doivent se compenser, cela évite de démontrer d'abord que le mouvement rectiligne est uniforme?*

• D'abord précisons un peu le vocabulaire, « se compenser » signifie que les forces doivent avoir :
ⓐ une résultante nulle;
ⓑ un moment résultant nul.
Si les forces s'appliquent sur une particule ponctuelle, il suffit de traduire la propriété ⓐ, la propriété ⓑ étant vérifiée si ⓐ est vérifiée.

• Écrire que la force électrique $\vec{F'} = q\vec{E}$ et la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ doivent se compenser tout au long du mouvement dans le filtre, c'est admettre à priori que le mouvement est rectiligne uniforme. (D'ailleurs les élèves qui raisonnent de cette façon, confondent en plus d'emblée $\vec{v}$ et $\vec{v_0}$!)

8 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN ÉLÉMENT DE CIRCUIT

E 98. *Un fil rectiligne* CD *de longueur* $\ell = 0{,}2$ m, *de milieu* M, *est totalement plongé dans un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *de module* $B = 10^{-2}$ T. *Il est parcouru par un courant d'intensité* $I = 4$ A.
Déterminer la force électromagnétique, ou force de Laplace, $\vec{F}$, *qui agit sur le fil dans les expériences schématisées ci-dessous. (Le fil ou les vecteurs représentés sont ou dans le plan de la figure ou perpendiculaires à ce plan.)*



M 41 **La force de Laplace** (ou force électromagnétique).

- Une portion de conducteur rectiligne MN, parcourue par un courant d'intensité I allant de M vers N, baignée par un espace champ magnétique uniforme $\vec{B}$, subit la force de Laplace :

$$\vec{F} = I\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}.$$

- Cette force, régulièrement répartie sur MN, peut être assimilée à une force localisée appliquée au milieu de MN.
- La force de Laplace peut effectuer un travail.

S 98. — Expérience ①.
- Expression de la force de Laplace $\vec{F}$: la portion de fil rectiligne CD est baignée totalement par le champ, le courant a le sens C vers D, le « vecteur-fil » à considérer est $\overrightarrow{CD}$; par suite $\vec{F} = I\overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}$.
- Direction de $\vec{F}$: le vecteur $\vec{F}$ est à la fois perpendiculaire à $\vec{B}$ et à $\overrightarrow{CD}$.
Commençons par le vecteur $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la figure, $\vec{F} \perp \vec{B}$ implique que $\vec{F}$ est dans le plan de la figure.
Dans ce plan, $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{CD}$, donc le support de la force localisée en M, est x'x (voir figure ci-après).
- Sens de $\vec{F}$: le trièdre $(I\overrightarrow{CD}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct. D'après la règle des trois doigts de la main droite : le pouce pointant dans le sens de $I\overrightarrow{CD}$, donc de $\overrightarrow{CD}$ puisque

$I>0$, l'index dans le sens de $\vec{B}$, le majeur nous indique le sens de $\vec{F}$ (voir figure ci-dessous).

$$: F = I \cdot CD \cdot B \, |\sin(\overrightarrow{CD}, \vec{B})| = I\ell B = 8 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

— Expérience 2 .

• Expression de la force de Laplace : le « vecteur-fil » est $\overrightarrow{CD}$ qui a le sens du courant :

$$\vec{F} = I\overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}.$$

• Direction de $\vec{F}$: le vecteur $\vec{F}$ est à la fois perpendiculaire à $\vec{B}$ et à $\overrightarrow{CD}$. Commençons par le vecteur $\overrightarrow{CD}$ qui est perpendiculaire au plan de la figure : $\vec{F} \perp \overrightarrow{CD}$ implique que $\vec{F}$ est dans le plan de la figure. Dans ce plan $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, le support de $\vec{F}$, localisée en M, est x'x.

• Sens de $\vec{F}$: le trièdre $(\overrightarrow{CD}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct (il n'est pas utile de mentionner I qui est toujours positif). Par suite $\vec{F}$ a le sens indiqué sur la figure.

• Module de $\vec{F}$: $F = I \cdot CD \cdot B \sin 90° = i\ell B = 8 \cdot 10^{-3}$ N.

— Expérience ③.

• Expression de la force de Laplace : $\vec{F} = I\overrightarrow{DC} \wedge \vec{B}$.

• Comme $\overrightarrow{DC}$ est parallèle à $\vec{B}$, $\vec{F} = \vec{0}$.

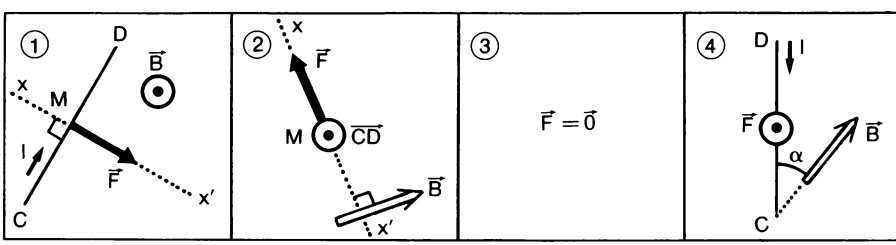
— Expérience ④.

• Expérience de la force de Laplace : $\vec{F} = I\overrightarrow{DC} \wedge \vec{B}$.

• Direction de $\vec{F}$: $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{DC}$ et à $\vec{B}$. Ces deux vecteurs, non parallèles, sont dans le plan de la figure : $\vec{F}$ est donc perpendiculaire au plan de la figure.

• Sens de $\vec{F}$: le trièdre $(\overrightarrow{DC}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct : $\vec{F}$ est dirigée de l'arrière vers l'avant de la figure.

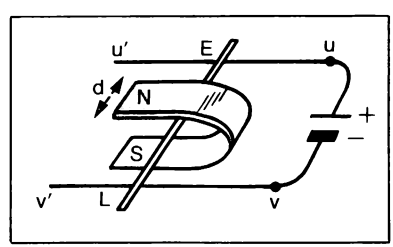
• Module de $\vec{F}$: $F = I \cdot DC \cdot B \cdot |\sin(\overrightarrow{DC}, \vec{B})|$. L'angle $(\overrightarrow{DC}, \vec{B}) = 180 - \alpha$ (c'est l'angle dont il faut faire tourner $\overrightarrow{DC}$ pour qu'il prenne la direction et le sens de $\vec{B}$). Comme $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$, $F = I\ell B \sin \alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ N.



E 99. *Un conducteur mobile rectiligne* EL, *de longueur* $\ell = 15$ cm, *est placé perpendiculairement à deux rails fixes, parallèles,* uu' *et* vv', *horizontaux. Le circuit* uELvu, *alimenté par un générateur de courant continu, est parcouru par un courant d'intensité* $I = 8$ A.

Un aimant en U *crée un champ magnétique* $\vec{B}$, *uniforme, de module* $B = 0{,}03$ T.

L'espace champ magnétique est pratiquement limité à l'intérieur du U, *c'est-à-dire sur une longueur* $d = 5$ cm *suivant* EL.



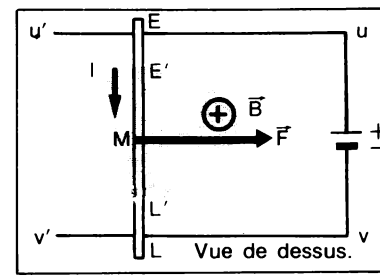
a) *Le conducteur mobile est en cuivre, pourquoi?*

b) *L'aimant est placé comme sur la figure,* $\vec{B}$ *est alors vertical. Déterminer la force de Laplace s'exerçant sur* EL *(direction, sens, module, point de localisation). Que fait le conducteur* EL?

c) *On place maintenant l'aimant de façon que* $\vec{B}$ *soit horizontal, parallèle à* u'u, *de sens* u' *vers* u. *Déterminer la force de Laplace s'exerçant sur* EL. *Que fait le conducteur* EL?
Note : faire deux schémas très clairs relatifs l'un à a), *l'autre à* b).

S 99. *a*) Il est nécessaire, pour ne pas fausser l'expérience que le conducteur mobile ne soit pas constitué par une substance ferromagnétique (en général à base de fer, de nickel ou de cobalt) car il serait alors attiré par l'aimant.
Le cuivre est un métal qui convient, on peut utiliser d'autres conducteurs (aluminium, graphite, ...).

b) • Présentation de la démarche : après avoir précisé le sens du courant, le sens de $\vec{B}$, nous donnerons l'expression vectorielle de la force de Laplace et nous en déduirons ses caractéristiques.



• A l'extérieur du générateur, le courant circule du pôle + vers le pôle −, il parcourt donc EL de E vers L. Soit E' et L' les extrémités du conducteur mobile baignées par le champ magnétique. Le « vecteur-fil » à considérer est le vecteur $\overrightarrow{E'L'}$.

• Les lignes de champ magnétiques orientées sortent par le pôle nord de l'aimant, à l'intérieur du U, le vecteur $\vec{B}$ est donc vertical, dirigé vers le bas. (La figure est une vue de dessus.)

• La force de Laplace sur le conducteur mobile a pour expression :

$$\vec{F} = I\overrightarrow{E'L'} \wedge \vec{B}.$$

• Direction de $\vec{F}$: $\vec{F} \perp \vec{B} \Longrightarrow \vec{F}$ dans le plan de la figure
$\vec{F} \perp \overrightarrow{E'L'} \Longrightarrow \vec{F} \,/\!/\, u'u$.

• Sens de $\vec{F}$: le trièdre $(\overrightarrow{E'L'}, \vec{B}, \vec{F})$ étant direct, d'après la règle des trois doigts de la main droite, $\vec{F}$ a le sens u' vers u.

• Module de $\vec{F}$: $F = I \cdot E'L' \cdot B \cdot |\sin(\overrightarrow{E'L'}, \vec{B})| = IdB = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ N.

• La force $\vec{F}$ est répartie uniformément sur E'L', on peut la localiser en M, milieu de E'L'.

• Sous l'action de cette force, le conducteur se met en mouvement vers la droite.

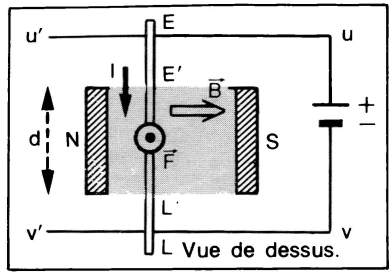
c) • Sur la figure ci-après nous avons placé l'aimant en U, sa largeur d conditionne encore la longueur de conducteur mobile baigné par le champ magnétique et parcouru par le courant : le « vecteur-fil » est encore $\overrightarrow{E'L'}$ de module d.

• La force de Laplace sur EL a pour expression $\vec{F} = I\overrightarrow{E'L'} \wedge \vec{B}$.

• Direction de $\vec{F}$: $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{E'L'}$ et à $\vec{B}$ qui sont deux vecteurs, non parallèles, du plan de la figure, $\vec{F}$ est donc perpendiculaire au plan de figure.

• Sens de $\vec{F}$: le trièdre $(\vec{E'L'}, \vec{B}, \vec{F})$ étant direct, $\vec{F}$ pointe vers le haut.

• Module de $\vec{F}$:
$F = I \cdot E'L' \cdot B \cdot |\sin(\vec{E'L'}, \vec{B})|$
$F = IdB = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ N.



• La force $\vec{F}$ répartie uniformément sur E'L' peut être localisée au milieu de E'L'.

• Il y a deux comportements possibles du conducteur mobile de poids $\vec{P} = m\vec{g}$:
— Si $F \leqslant P$: le conducteur reste fixe.
— Si $F > P$ (cas vraisemblablement exceptionnel car il faudrait que $m < 1{,}2$ g) le conducteur se soulève très légèrement ce qui ouvre le circuit, alors $\vec{F} = \vec{0}$, le conducteur retombe ce qui referme le circuit, etc. Le conducteur a donc tendance à vibrer verticalement.
Remarque : La donnée $\ell = 15$ cm ne servait pas, c'était un « piège ».

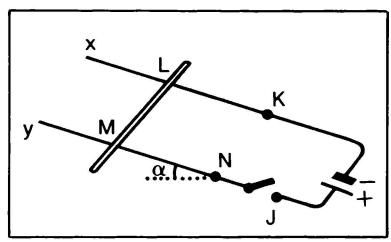
E 100. *Un circuit électrique déformable est constitué par :*

— un générateur de f.é.m. $E = 12$ V, *de résistance interne* $r = 0{,}8\ \Omega$;

— un interrupteur J;

— deux rails fixes Kx *et* Ny, *rigides, parallèles, inclinés de* $\alpha = 20°$ *par rapport à l'horizontale, de résistance négligeable;*

— une tige de cuivre qui repose sur les rails fixes en L *et* M, *distants de* $LM = \ell = 0{,}15$ m. *Cette tige est horizontale, perpendiculaire aux rails fixes, elle peut glisser sur ceux-ci sans frottement, son centre d'inertie* G *est situé au milieu de* LM, *sa masse est* $m = 15$ g. *La tige* LM *est entièrement baignée par un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$.



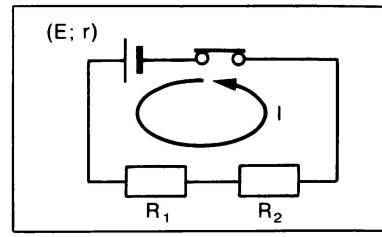
a) $\vec{B}$ *est perpendiculaire au plan des rails. On tient la tige* LM *immobile. On abaisse l'interrupteur* J. *On lâche la tige. Elle reste immobile. Déterminer le sens et le module de* $\vec{B}$. $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

b) $\vec{B}$, *gardant le module précédent, devient vertical, dirigé vers le bas. On tient la tige* LM *immobile. On abaisse l'interrupteur* J. *On lâche la tige à la date* $t = 0$, *déterminer l'accélération* $\vec{a_0}$ *de la tige à cette date.*

Note : dès que la tige prend de la vitesse, il apparaît dans cette tige un phénomène d'induction qui sera étudié ultérieurement, c'est pour cela que l'énoncé limite le calcul de $\vec{a}$ *au départ à vitesse nulle.*

42 La loi de Pouillet.

Soit un circuit ne comportant aucune dérivation (un oscillographe ou un voltmètre parfait ne consommant pas de courant ne seront pas considérés comme des dérivations)..



Ce circuit est parcouru par un courant d'intensité I donné par la loi de Pouillet :

$$I = \frac{E}{r + R_1 + R_2}.$$

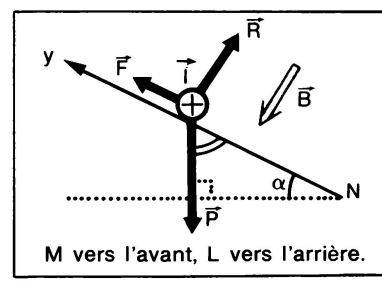
(Nous algébriserons ultérieurement cette loi.)

S 100. *a*) • Présentation de la démarche : à partir des directions de LM et de $\vec{B}$ on peut préciser la direction de la force de Laplace $\vec{F}$ agissant sur LM; à partir de la condition d'équilibre on pourra préciser le sens de $\vec{F}$ puis celui de $\vec{B}$ et le module de B.

• (Lorsqu'on a un plan incliné ou des rails inclinés, il est conseillé de faire une figure vue de côté, de façon à avoir des vecteurs dans le plan de la figure ou perpendiculaires à ce plan.)

— Expression de la force de Laplace : le courant parcourt la tige de M vers L, toute la tige est baignée par le champ magnétique, le « vecteur-fil » est $\overrightarrow{ML}$; la force de Laplace agissant sur ML est :

$$\vec{F} = I\overrightarrow{ML} \wedge \vec{B}. \qquad (1)$$



M vers l'avant, L vers l'arrière.

— Direction de $\vec{F}$: $\vec{F} \perp \overrightarrow{ML} \Longrightarrow \vec{F}$ dans le plan de la figure;
$\vec{F} \perp \vec{B} \Longrightarrow \vec{F} \,/\!/$ au rail Ny.

— Module de $\vec{F}$: $F = I \cdot ML \cdot |\sin(\overrightarrow{ML}, \vec{B})| = I\ell B$. (Remarquer que $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan des rails, donc à toutes les droites de ce plan, en particulier à ML.)

• Le système est la tige LM. Elle est soumise à la force de Laplace résultant de l'interaction entre le courant et le champ magnétique; à son poids $\vec{P}$ dû à la Terre; à la réaction $\vec{R}$ due aux deux rails, perpendiculaire à ceux-ci puisqu'il n'y a pas de frottement.

La tige est en équilibre par rapport aux rails fixes, donc dans un repère pratiquement galiléen, par suite :

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}. \qquad (2)$$

— Pour équilibrer $\vec{P} + \vec{R}$, la force $\vec{F}$ doit obligatoirement avoir le sens N vers y. En conséquence, le trièdre $(\overrightarrow{ML}, \vec{B}, \vec{F})$ devant être direct (revoir (1)), d'après la

règle des trois doigts de la main droite, $\vec{B}$ doit avoir le sens indiqué sur la figure.

— Projetons l'égalité vectorielle (2) sur l'axe Ny : $\overline{Fy}+\overline{Py}+\overline{Ry}=0$.

D'où $$F-P\sin\alpha+0=0.$$

Par suite $$I\ell B=mg\sin\alpha,\quad B=\frac{mg\sin\alpha}{I\ell}.$$

• Pour évaluer I, appliquons la loi de Pouillet au circuit sans dérivation KLNJK :

$$I=\frac{E}{r+0}=\frac{12}{0{,}8}=15\text{ A}.$$

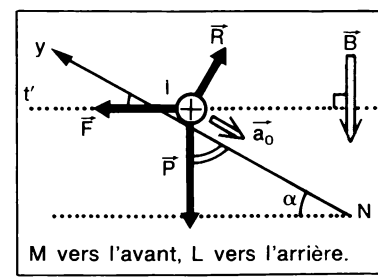
On peut maintenant en déduire le module de B :

$$B=\frac{15\cdot10^{-3}\times9{,}8\times\sin 20^\circ}{15\times0{,}15}=2{,}23\cdot10^{-2}\text{ T}.$$

b) • Présentation de la démarche, on peut préciser d'emblée toutes les caractéristiques de la force de Laplace; le théorème du centre d'inertie, appliqué à la date $t=0$, va permettre de déterminer $\vec{a}_0$.

• La force de Laplace garde la même expression vectorielle :

$$\vec{F}=I\ \overrightarrow{ML}\wedge\vec{B}.$$



M vers l'avant, L vers l'arrière.

— Direction de $\vec{F}$:
$\vec{F}\perp\overrightarrow{ML}\Longrightarrow\vec{F}$ dans le plan de la figure;
$\vec{F}\perp\vec{B}\Longrightarrow\vec{F}$ a la direction t't.
— Sens de $\vec{F}$: le trièdre $(\overrightarrow{ML},\vec{B},\vec{F})$ est direct, d'après la règle des trois doigts de la main droite, $\vec{F}$ a le sens t vers t'.
— Module de $\vec{F}$:
$F=I\cdot ML\cdot B\cdot|\sin(\overrightarrow{ML},\vec{B})|=I\ell B$ (en remarquant que $\vec{B}$ vertical est perpendiculaire à $\overrightarrow{ML}$ horizontal).

• Le système est la tige ML; le repère lié à la Terre est pratiquement galiléen; la tige est soumise à $\vec{F}$, $\vec{P}$ et $\vec{R}$ déjà présentées; la tige glisse en translation sur les rails fixes, le vecteur accélération $\vec{a}_0$ de son centre d'inertie à la date $t=0$ est donc parallèle aux rails fixes. D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F}+\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}_0.$$

Désignons par $\overline{a_0}$ l'accélération algébrique de $\vec{a}_0$ sur l'axe Ny :

$$\overline{Fy}+\overline{Py}+\overline{Ry}=m\,\overline{a_0}.$$

D'où $$F\cos\alpha-P\sin\alpha=m\,\overline{a_0}.$$

Par suite $$\overline{a_0}=\frac{I\ell B\cos\alpha-mg\sin\alpha}{m}.$$

D'après la première question $I\ell B=mg\sin\alpha$, donc :

$$\overline{a_0}=\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha-mg\sin\alpha}{m}=g\sin\alpha(\cos\alpha-1)=-0{,}20\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

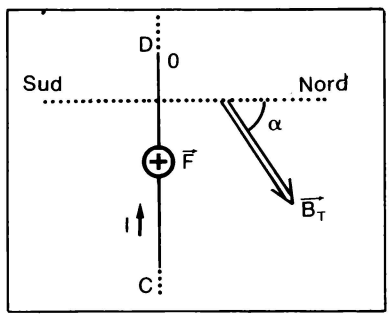
Comme $\overline{a_0}$ est négatif, cela signifie que le vecteur $\vec{a}_0$ a le sens négatif de l'axe Ny, la tige se met en mouvement vers le bas des rails fixes.

• Sens de $\vec{F}$: le trièdre $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{B_T}, \vec{F})$ est direct, d'après la règle des trois doigts de la main droite, $\vec{F}$ est dirigé vers l'arrière.
• Module de $\vec{F}$: $F = I \cdot CD \cdot B_T \cdot |\sin(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{B_T})|$.
L'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{B_T}) = 90° + \alpha$; $\sin(90° + \alpha) = \cos \alpha$, donc :

$$F = I\ell\, B_T \cos \alpha = 5 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

E 101. *Un fil vertical* CD, *fixe, long de* $\ell = 1$ m, *est parcouru par un courant d'intensité* $I = 20$ A, *dirigé vers le haut. La source du champ magnétique est uniquement la Terre. Le champ magnétique terrestre* $\overrightarrow{B_T}$ *est uniforme, il a pour module* $B_T = 5 \cdot 10^{-5}$ T, *il est incliné de* $\alpha = 60°$ *par rapport à l'horizontale en pointant vers le sol. Déterminer les caractéristiques de la force de Laplace* $\vec{F}$ *agissant sur le fil.*

S 101. Choix du plan de la figure : prenons un plan tel que le fil et $\overrightarrow{B_T}$ soient dedans : le plan vertical passant par le fil, parallèle à la direction Nord magnétique-Sud magnétique, convient. (Ce plan est appelé le plan du méridien magnétique, voir ℳ 35.)

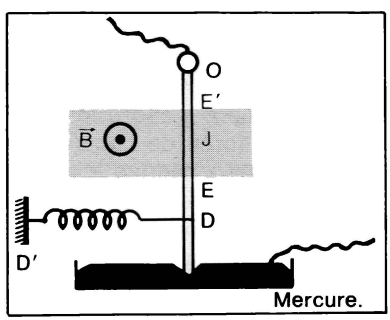


• Expression de la force de Laplace : $\vec{F} = I\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{B_T}$.

• Direction de $\vec{F}$: $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{CD}$ et à $\overrightarrow{B_T}$, qui sont deux vecteurs non parallèles du plan de la figure, dont $\vec{F}$ est perpendiculaire au plan de la figure.

• La force $\vec{F}$ répartie uniformément sur CD peut être localisée au milieu de CD.

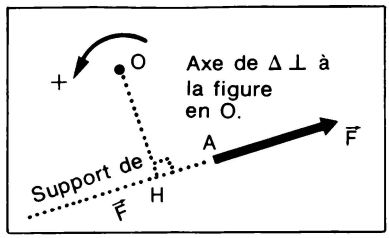
E 102. *Une tige de cuivre est mobile sans frottement autour d'un axe horizontal* Δ *passant par son extrémité supérieure* O.
La tige est parcourue par un courant d'intensité $I = 6$ A, *de sens non indiqué. Elle est baignée sur la longueur* $EE' = \ell = 6$ cm *par un champ magnétique uniforme horizontal* $\vec{B}$. $B = 10^{-1}$ T.
Grâce à un petit ressort horizontal accroché en D, *légèrement tendu, à la distance* OD = 15 cm, *on maintient la tige verticale. Le milieu* J *de* E'E *est à la distance* OJ = 7 cm *de l'axe.*



Quel est le sens du courant? Quel est l'allongement du ressort de coefficient de raideur $k = 2$ N·m^{-1}.
On négligera le champ magnétique terrestre et l'action de contact du mercure.

43 Moment d'une force localisée.

• Lorsqu'une force localisée $\vec{F}$ s'exerce sur un solide mobile autour d'un axe Δ, l'effet de rotation se mesure par le moment de la force par rapport à Δ.



• Si $\vec{F} \,/\!/\, \Delta$, alors $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = 0$.

• Si le support de $\vec{F}$ passe par Δ, alors $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = 0$.

• Si le support de $\vec{F}$ est dans un plan P perpendiculaire à Δ, il est intéressant de faire intervenir l'intersection O de P et Δ (voir figure).

La distance entre O et le support de $\vec{F}$ est le bras de levier OH de $\vec{F}$. (Remarquer : $OH \perp \vec{F}$ et $OH \perp \Delta$.)

Le moment de $\vec{F}$ par rapport à Δ est $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = \pm F \cdot OH$.

(+ si $\vec{F}$ a tendance à faire tourner dans le sens + choisi).

$\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}}$ s'exprime en N·m dans le système d'unités internationales.

44 Les deux conditions d'équilibre d'un solide.

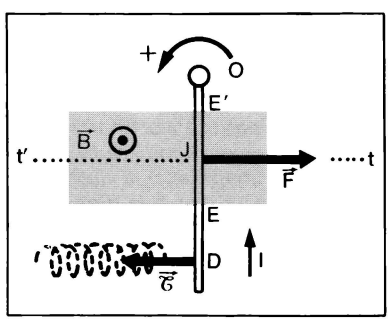
• Soit un solide en équilibre dans un repère galiléen. Ce solide est soumis à diverses forces localisées (ou que l'on peut remplacer par des forces localisées, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ...

Ce solide peut tourner éventuellement autour d'un axe fixe Δ.

• Lorsque le solide est en équilibre :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \qquad \text{et} \quad /\Delta \qquad \Sigma \overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = 0.$$

S 102. • Présentation de la démarche : on déterminera d'abord les caractéristiques de la force de Laplace s'exerçant sur E'E; on en déduira le sens de I; en étudiant l'équilibre de la tige on en déduira la tension $\mathcal{C}$ du ressort.



• La force de Laplace s'exerçant sur E'E a pour expression :

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

en désignant par $\vec{\ell}$ le vecteur $\overrightarrow{E'E}$ ou $\overrightarrow{EE'}$, nous le déterminerons.

— Direction de $\vec{F}$: $\vec{F} \perp \vec{B} \implies \vec{F}$ dans le plan de la figure;
$\vec{F} \perp E'E \implies \vec{F}$ a la direction t't.
— Sens de $\vec{F}$, le ressort tire vers la gauche puisqu'il est tendu, $\vec{F}$ doit donc tirer vers la droite pour maintenir la tige verticale.
— Module de $\vec{F}$: $F = I\ell B\left|\sin(\vec{\ell}, \vec{B})\right| = I\ell B$.
— Conséquence : le trièdre $(\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F})$ devant être direct, d'après la règle des trois doigts de la main droite, on en déduit que $\vec{\ell}$ a le sens E vers E', $\vec{\ell}$ n'est autre que $\overrightarrow{EE'}$: le courant monte dans la tige.

• Par rapport à la Terre, repère pratiquement galiléen, la tige est en équilibre sous l'action de la force de Laplace $\vec{F}$ localisée en J milieu de EE'; de son poids localisé en G, centre d'inertie; de la réaction $\vec{R}$ de l'axe Δ, localisée sur l'axe; de la tension $\vec{\mathcal{T}}$ du ressort, localisée en D.

Par suite $$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{\mathcal{T}} = \vec{0}$$

et /Δ $$\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{R}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{T}}}} = 0.$$

Comme $\overline{\mathcal{M}_{\vec{R}}} = 0$ puisque le support de $\vec{R}$ rencontre Δ, la deuxième condition ne fait finalement pas intervenir $\vec{R}$, c'est elle que nous allons exploiter.

$$\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = +F \cdot OJ \text{ car } \vec{F} \perp OJ.$$

$\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} = 0$ car $\vec{P}$ (non représenté sur la figure) a son support confondu avec la tige, donc passant par Δ.
$\overline{\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{T}}}} = -\mathcal{T} \cdot OD$ car $\vec{\mathcal{T}} \perp OD$.

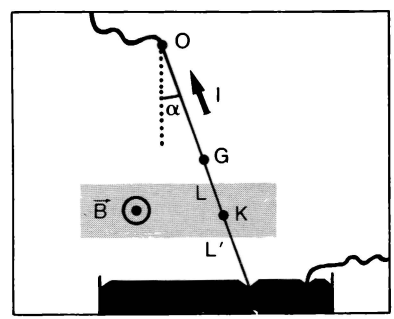
Par suite $$F \cdot OJ = \mathcal{T} \cdot OD$$

$$\mathcal{T} = F \cdot \frac{OJ}{OD} = I\ell B \cdot \frac{OJ}{OD} = 1{,}68 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

• Soit D_V la position qu'aurait l'extrémité du ressort si celui-ci était à vide, la tension $\vec{\mathcal{T}} = -k\overrightarrow{D_V D}$ (revoir ℳ 16).

En module $\mathcal{T} = k D_V D$, l'allongement $D_V D = \frac{\mathcal{T}}{k} = 8{,}4 \cdot 10^{-3}$ m = 8,4 mm.

E 103. *Une tige de cuivre est mobile sans frottement autour d'un axe horizontal* Δ *passant par son extrémité supérieure* O. *Elle est en équilibre, inclinée de* $\alpha = 30°$ *par rapport à la verticale.*
La tige est parcourue par un courant d'intensité I *inconnue, de sens indiqué sur la figure. Elle est baignée sur la longueur* $LL' = \ell = 7$ cm *par un champ magnétique uniforme horizontal* $\vec{B}$, *de module* B = 0,1 T.
Le milieu K *de* LL' *est à la distance* OK = 24 cm *de* O.
Le centre d'inertie de la tige est en G *tel que* OG = 15 cm, *la masse de la tige est* m = 26 g.
Déterminer I.
On négligera le champ magnétique terrestre et l'action de contact du mercure. $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

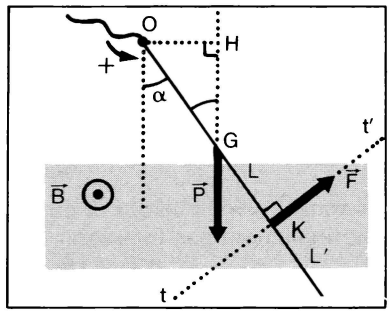


S 103. • Présentation de la démarche : certaines caractéristiques de la force de Laplace, sont connues d'emblée (direction, sens, point de localisation); en étudiant l'équilibre de la tige, on déterminera le module de F et par suite l'intensité du courant.

• La force de Laplace a pour expression $\vec{F} = I\,\overrightarrow{L'L} \wedge \vec{B}$.

— Direction de $\vec{F}$: $\vec{F} \perp \vec{B} \implies \vec{F}$ dans le plan de la figure;
$\vec{F} \perp \overrightarrow{L'L} \implies \vec{F}$ a la direction t't.

— Sens de $\vec{F}$, il est évident que $\vec{F}$ a le sens t vers t', le trièdre $(\overrightarrow{L'L}, \vec{B}, \vec{F})$, direct, nous le confirme.



— Module de $\vec{F}$:

$$F = I \cdot L'L \cdot B\,|\sin(\overrightarrow{L'L}, \vec{B})| = I\ell B,$$

il fait intervenir l'inconnue I.

— Point de localisation : le champ étant uniforme de L' à L, la force $\vec{F}$ peut être localisée en K, milieu de L'L.

• Par rapport à la Terre, repère galiléen, la tige est en équilibre sous l'action de la force de Laplace $\vec{F}$; de son poids $\vec{P}$ localisé en G; de la réaction $\vec{R}$ de l'axe, localisée sur cet axe non dessinée. Par suite :

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

et /Δ $$\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{R}}} = 0.$$

$\mathcal{M}_{\vec{R}} = 0$ car $\vec{R}$ s'applique sur l'axe.
$\mathcal{M}_{\vec{F}} = +F \cdot OK$ car $\vec{F} \perp OK$.
$\mathcal{M}_{\vec{P}} = -P \cdot OH = -P \cdot OG \cdot \sin\alpha$

$\left(\text{en effet dans le triangle OGH, rectangle en H, } \sin\alpha = \dfrac{OH}{OG}\right)$.

Par suite
$$F \cdot OK - P \cdot OG \cdot \sin\alpha = 0$$
$$I\ell B \cdot OK = mg \cdot OG \cdot \sin\alpha$$
$$I = \frac{mg \cdot OG \cdot \sin\alpha}{\ell B \cdot OK} = 11{,}4\ \text{A}.$$

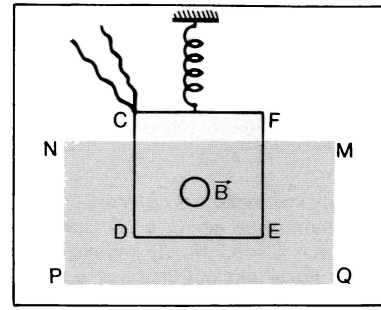
E 104. *Un cadre rectangulaire* CDEF *indéformable, comportant* N = 100 *spires est suspendu à un dynamomètre.*
Il se trouve plongé partiellement dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ *qui restera perpendiculaire au plan vertical du cadre. On admet que le champ est limité dans le plan du cadre par le rectangle* MNPQ, *avec* MN *horizontal. Les brins horizontaux* CF *et* DE *ont une longueur* $\ell = 5$ cm. *On négligera le champ magnétique terrestre.*
Lorsqu'on établit un courant d'intensité constante I = 0,5 A, *l'ensemble prend une position d'équilibre et l'indication du dynamomètre augmente de* 0,5 N. *On supposera que les fils destinés à amener le courant ne perturbent pas l'équilibre du cadre dont le plan reste fixe.*

a) Montrer que, quels que soient le sens du courant et celui du champ magnétique, les forces s'exerçant sur les brins verticaux du cadre n'ont aucune action sur son équilibre.

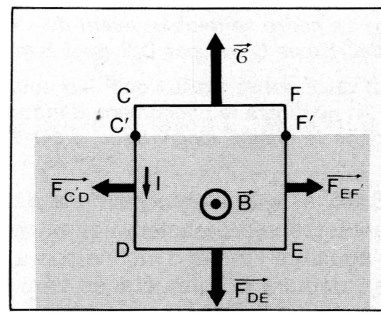
b) Caractériser le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ (sens et intensité), le courant circulant dans le conducteur DE *de* D *vers* E.

c) Que se passe-t-il si le cadre est entièrement plongé dans le champ magnétique $\vec{B}$ précédent?
Par quelle face du cadre $\vec{B}$ sort-il?

(D'après bac)



§104. *a)* • Supposons que le courant a le sens noté sur la figure.
Sur CD, la force de Laplace est $\overrightarrow{F_{C'D}} = NI\,\overrightarrow{C'D} \wedge \vec{B}$ (il y a N fils).
Sur EF, la force de Laplace est $\overrightarrow{F_{EF'}} = NI\,\overrightarrow{EF'} \wedge \vec{B}$.
Comme $\overrightarrow{EF'} = -\overrightarrow{C'D}$, ces deux forces sont opposées : leur résultante est nulle. Comme de plus ces forces ont même support, leur moment résultant est nul. En résumé ces forces se compensent et ce quel que soit $\vec{B}$.



• Si le courant a le sens opposé, pour le même $\vec{B}$, les forces deviennent opposées aux précédentes : elles se compensent encore.

b) • Sur DE, la force de Laplace $\overrightarrow{F_{DE}} = NI\,\overrightarrow{DE} \wedge \vec{B}$.
— Direction : $\overrightarrow{F_{DE}} \perp \vec{B} \Longrightarrow \overrightarrow{F_{DE}}$ dans le plan de la figure;

$\overrightarrow{F_{DE}} \perp \overrightarrow{DE} \Longrightarrow \overrightarrow{F_{DE}}$ parallèle à CD.

— Sens : le ressort étant plus tendu, $\overrightarrow{F_{DE}}$ est dirigée vers le bas. En conséquence comme le trièdre $(\overrightarrow{DE}, \vec{B}, \overrightarrow{F_{DE}})$ doit être direct, $\vec{B}$ pointe vers l'avant.
— Module : $F_{DE} = N \cdot I \cdot DE \cdot B \cdot |\sin(\overrightarrow{DE}, \vec{B})| = NI\ell B$.
• Lorsque le courant est nul, le cadre en équilibre est uniquement soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{\mathcal{C}}_0$ du ressort : $\vec{P} + \vec{\mathcal{C}}_0 = \vec{0}$, d'où $\mathcal{C}_0 = P$ (1).
• Lorsque le courant est établi, le ressort a la tension $\vec{\mathcal{C}}$. Le cadre en équilibre est soumis à $\overrightarrow{F_{DE}}$, $\vec{\mathcal{C}}$, $\vec{P}$, $\overrightarrow{F_{C'D}}$ et $\overrightarrow{F_{EF'}}$ qui se compensent.
D'où $$\overrightarrow{F_{DE}} + \vec{\mathcal{C}} + \vec{P} = \vec{0}.$$
Projetons sur la verticale ascendante $-F_{DE} + \mathcal{C} - P = 0$ soit $\mathcal{C} - P = F_{DE}$, c'est-à-dire d'après (1) : $\mathcal{C} - \mathcal{C}_0 = F_{DE}$.
• Remplaçons F_{DE} par $NI\ell B$, il s'ensuit :
$$NI\ell B = \mathcal{C} - \mathcal{C}_0$$
soit $$B = \frac{\mathcal{C} - \mathcal{C}_0}{NI\ell} = \frac{0{,}5}{100 \times 0{,}5 \times 5 \cdot 10^{-2}} = 0{,}2\ \text{T}.$$

c) • Les forces sur CD et EF se compensent (résultante et moment total nuls).
Les forces sur DE et FC se compensent (résultante et moment total nuls).
Le cadre ne bouge donc pas lorsqu'on lance le courant.

• Le cadre reste en équilibre. D'après la règle de la main droite, les doigts autres que le pouce tournant dans le sens de I, le pouce nous indique le côté face nord du cadre : la face nord est vers nous. Le champ magnétique $\vec{B}$ (dû à une source autre que le cadre) sort donc par la face nord et perpendiculairement à celle-ci. (Nous y reviendrons à la fin de ce chapitre.)

E 105. *Une barre de cuivre* CD, *rectiligne, horizontale, homogène, de masse* $m = 30$ g *est maintenue en* C *et* D *par deux fils conducteurs souples, parallèles, de même longueur* $L = 0{,}9$ m, *de masse négligeable, attachés à deux points fixes* γ et δ.
Cette barre est baignée entre C′ *et* D′ ($C'D' = \ell = 8$ cm, C′ *et* D′ *sont symétriques par rapport au milieu* M *de* CD) *par un champ magnétique uniforme, vertical, orienté vers le bas, de module* $B = 10^{-2}$ T. *On néglige le champ magnétique terrestre. On fait passer un courant d'intensité* $I = 5$ A, *dans le sens* γCDδ.

a) *Le cadre se déplace avant de s'équilibrer, quelle est la longueur de l'arc de cercle décrit par* C (*ou par* D)? $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

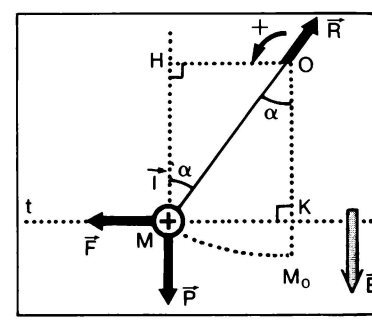
b) *Quel est le travail de* $\vec{F}$ *au cours de ce déplacement?*
(*On négligera le phénomène d'induction qui apparaît dans* C′D′ *lorsque la barre bouge dans le champ magnétique, c'est-à-dire que* I *sera supposé rester égal à* 5 A).

S 105. *a*) • Présentation de la démarche : la force de Laplace agissant sur C′D′ a toutes ses caractéristiques connues d'emblée; on déterminera en étudiant l'équilibre l'angle d'inclinaison α des fils γC et δD par rapport à la verticale; on en déduira la longueur de l'arc balayé par C.

• Choix du plan de figure : faisons une vue de côté, c'est-à-dire prenons un plan de figure perpendiculaire à $\gamma\delta$ et à CD, de cette façon les vecteurs à considérer sont dans le plan de la figure ou perpendiculaires à ce plan. O est le point d'intersection de $\gamma\delta$ avec ce plan, γ est vers l'avant, δ vers l'arrière.

• La force de Laplace $\vec{F}$ s'applique sur la partie C′D′ de CD à la fois baignée par le champ magnétique et parcourue par le courant I, comme le courant va de C′ vers D′ :

$$\vec{F} = I\ \overrightarrow{C'D'} \wedge \vec{B}.$$



— Direction de $\vec{F}$: $\vec{F} \perp \overrightarrow{C'D'} \Longrightarrow \vec{F}$ dans le plan de la figure; $\vec{F} \perp \vec{B} \Longrightarrow \vec{F}$ a la direction t′t, horizontale.

— Sens de $\vec{F}$: le trièdre $(\overrightarrow{C'D'}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct, d'après la règle des trois doigts de la main droite, $\vec{F}$ est dirigée vers la gauche.

— Module de $\vec{F}$: $F = I \cdot C'D' \cdot B \cdot |\sin(\overrightarrow{C'D'}, \vec{B})| = I\ell B$.

— Point de localisation : $\vec{F}$ répartie uniformément sur C′D′ peut être localisée au milieu M de C′D′.

• Prenons comme système l'ensemble γCDδ qui se comporte comme un solide en rotation autour de $\gamma\delta$. Le repère est la Terre. Ce système est en équilibre sous l'action de la force de Laplace $\vec{F}$, de son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ localisé en M, de la réaction $\vec{R}$ localisée en γ et en δ.

par suite $\vec{F}+\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$ et, l'axe étant $\gamma\delta$, $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{F}}}+\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{P}}}+\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{R}}}=0$.
Exploitons la deuxième condition, simple car $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{R}}}=0$ puisque $\vec{R}$ s'applique sur $\gamma\delta$.

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{F}}}=-F\cdot OK=-FL\cos\alpha$

(dans le triangle rectangle OKM : $\cos\alpha=\dfrac{OK}{OM}=\dfrac{OK}{L}$)

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{P}}}=+P\cdot OH=+PL\sin\alpha$

(dans le triangle rectangle MHO : $\sin\alpha=\dfrac{OH}{OM}=\dfrac{OH}{L}$).

On en déduit $$-FL\cos\alpha+PL\sin\alpha=0$$

d'où $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F}{P}=\frac{I\ell B}{mg}=1{,}36\cdot10^{-2}.$$

Comme tg α est petit, tg $\alpha\simeq\alpha$ rad (revoir $\mathcal{M}$ 40), donc $\alpha=1{,}36\cdot10^{-2}$ rad.

• Soit M_0 la position de M à l'équilibre lorsque I = 0. L'arc balayé par C (ou D) est égal à $\overset{\frown}{M_0M}$. Le point M décrivant un arc de cercle de rayon L : $\overset{\frown}{M_0M}=L\alpha$ (revoir $\mathcal{M}$ 5) Numériquement $\overset{\frown}{M_0M}=1{,}22\cdot10^{-2}$ m = 1,22 cm.

b) • Présentation de la démarche : montrons que la force de Laplace $\vec{F}$ est constante; alors le travail de $\vec{F}$, qui se déplace de M_0 à M, est $W_{\vec{F}}=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_0M}$ (produit scalaire).

• $\vec{F}=I\cdot\overrightarrow{C'C}\wedge\vec{B}$; I est supposé constant; la barre CD est en translation circulaire : $\overrightarrow{C'C}$ reste équipollent à lui-même; enfin $\vec{B}$ est le même tout au long du déplacement puisque le champ est uniforme. Donc $\vec{F}$ est constante.

• De M_0 à M, $W_{\vec{F}}=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_0M}=\vec{F}\cdot(\overrightarrow{M_0K}+\overrightarrow{KM})=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_0K}+\vec{F}\cdot\overrightarrow{KM}$.

$\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_0K}=0$ car $\vec{F}\perp\overrightarrow{M_0K}$.

$\vec{F}\cdot\overrightarrow{KM}=F\cdot KM=FL\sin\alpha$ (KM = OH = L sin α).

Par suite $W_{\vec{F}}=FL\sin\alpha=I\ell BL\sin\alpha=I\ell BL\,\alpha$ puisque $\sin\alpha\simeq\alpha$ rad.

Numériquement $W_{\vec{F}}=4{,}9\cdot10^{-5}$ J.

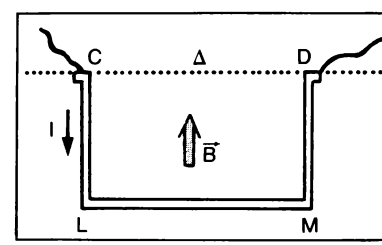
Remarque : Pour la question *a)* on pouvait prendre comme système la barre CD soumise à $\vec{F}$, $\vec{P}$ et à la tension $\vec{\mathcal{C}}$ des fils, puis exploiter $\Sigma\vec{F}=\vec{0}$.

E 106. *Un cadre rigide* CLMD *est constitué par un conducteur de section uniforme, homogène, coudé à angle droit en* L *et* M, *rectiligne ailleurs.*

CL = DM = b = 10 cm; LM = a = 20 cm; *la masse du cadre* m = 32 g; g = 9,8 N·kg^{-1}.

Ce cadre est mobile autour de l'axe horizontal Δ *passant par* C *et* D.

Il est baigné par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, *vertical, vers le haut, de module* B = 0,1 T.

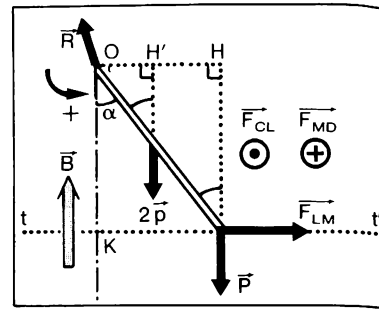


Le cadre initialement vertical tourne d'un angle α, *lorsqu'il est parcouru par un courant continu d'intensité* I = 3 A, *ayant le sens* CLMD.

a) *Évaluer en fonction de* m, a, b *et* g, *le poids* p *de* CL (*ou* DM) *et le poids* P *de* LM.

b) *Évaluer* α.

S 106. (Nous ne donnons que des indications et les réponses.)



a) $p = \dfrac{mgb}{2b+a}$; $P = \dfrac{mga}{2b+a}$.

b) • Figure dans un plan $\perp \Delta$ qui la coupe en O.

• Présenter les forces de Laplace.

• Exploiter $\Sigma\overline{\mathcal{M}} = 0$ par rapport à Δ :

$$\overline{\mathcal{M}_{\vec{R}}} + 2\overline{\mathcal{M}_{\vec{p}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{F}_{CL}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{F}_{LM}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{F}_{MD}}} = 0$$

$\mathcal{M}_{\vec{R}} = 0$ car $\vec{R}$ passe par l'axe Δ.

$\overline{\mathcal{M}_{\vec{p}}} = -p \cdot OH' = -p\,\dfrac{b}{2}\sin\alpha$.

$\mathcal{M}_{\vec{P}} = -P \cdot OH = -Pb\sin\alpha$.

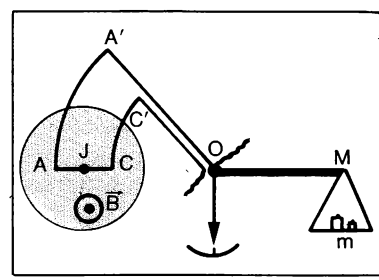
$\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}_{CL}}} = \overline{\mathcal{M}_{\vec{F}_{MD}}} = 0$ car forces parallèles à l'axe Δ.

$\overline{\mathcal{M}_{F_{LM}}} = +F_{LM} \cdot OK = +laBb\cos\alpha$.

Finalement $\quad -pb\sin\alpha - Pb\sin\alpha + laBb\cos\alpha = 0$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{laB}{p+P} = \frac{laB(2b+a)}{mg(b+a)} = 0{,}255; \quad \alpha = 14{,}3°.$$

E 107. *(Balance de Cotton)*



• *Description :* MOA' *est un levier coudé qui porte une plaquette isolante* A'ACC'; un fil conducteur est appliqué le long de OA'ACC'O; AA' *et* CC' *sont des arcs de cercles de centre* O; A, C, O *et* M *sont alignés*; J *étant le milieu de* AC, *on pose* $JO = \ell$; *le bras de levier* $OM = \ell'$.
Lorsque la balance est à vide (pas de masse marquée dans le plateau, pas de courant dans le fil conducteur), AM *est horizontal. Le cercle gris représente l'espace champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *horizontal, perpendiculaire à* AC, *donc parallèle à l'axe* Δ *de la balance passant par* O.

• *Données :* $d = AC = 2{,}0$ cm; $\ell' = \ell$; $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$.

a) *On fait passer un courant d'intensité* I *dans le fil conducteur, pour que la balance revienne en équilibre,* AM *horizontal, il faut placer dans le plateau une masse* m.

α) *Quel doit être le sens du courant?*

β) *Quelle est la condition d'équilibre de cette balance?*

γ) *Lorsque* $I = 2{,}15$ A, $m = 0{,}367$ g; *en déduire la valeur de* B.

b) *L'espace champ magnétique étendu baigne toute la balance, il est toujours uniforme avec* $\vec{B}$ *parallèle à* Δ. *Peut-on le mesurer?*

(Partie a) inspirée d'un énoncé de bac)

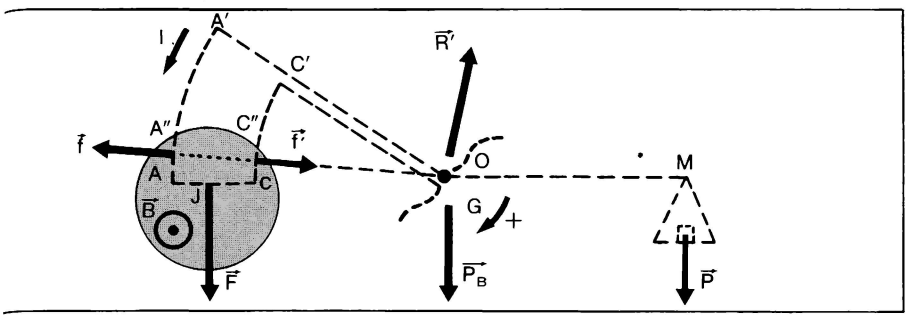
S 107. *a*) α) • Nous allons montrer en β) que la seule force de Laplace jouant un rôle dans l'équilibre est celle s'exercant sur AC, cette force a pour expression :

$$\vec{F} = I\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B} \quad \text{ou bien} \quad \vec{F} = I\overrightarrow{CA} \wedge \vec{B} \text{ suivant le sens du courant.}$$

Dans les deux cas elle est perpendiculaire à $\vec{B}$ donc est dans le plan de la figure, elle est ensuite perpendiculaire à AC donc est verticale.

• Cette force $\vec{F}$ doit avoir un moment, par rapport à Δ, de signe opposé à celui du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ de la masse : $\vec{F}$ doit donc être dirigée vers le bas.

• Le trièdre $(\vec{I}$ dans AC, $\vec{B}$, $\vec{F})$ étant direct, le sens du courant dans AC est de A vers C. L'expression vectorielle de $\vec{F}$ est par suite $\vec{F} = I\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B}$.



β) • Présentation de la démarche : en considérant la balance à vide on en déduira que le poids $\vec{P}_{\vec{B}}$ du fléau ne joue pas de rôle lorsque AM est horizontal; en déterminant la direction des forces de Laplace on constatera que seule la force agissant sur AC joue un rôle; il ne restera plus qu'à exploiter l'équilibre de la balance en fonctionnement.

• La balance à vide est en équilibre, AM horizontal, sous l'action de son poids $\vec{P}_B$ et de la réaction de l'axe $\vec{R}$. Par rapport à Δ : $\mathcal{M}_{\vec{P}_B} + \mathcal{M}_{\vec{R}} = 0$.

Comme $\mathcal{M}_{\vec{R}} = 0$, le moment $\mathcal{M}_{\vec{P}_B} = 0$ lorsque AM est horizontal (1).

• Présentation des forces de Laplace : ces forces sont perpendiculaires à $\vec{B}$ donc sont dans le plan de la figure, traduisons qu'elles sont perpendiculaires au conducteur :

— la force $\vec{f}$, perpendiculaire à l'arc de cercle $\overset{\frown}{A''A}$ de centre O, a son support qui passe par O, son moment par rapport à Δ, $\mathcal{M}_{\vec{f}} = 0$ (2);

— de même la force $\vec{f}'$ s'exerçant sur CC'' a un moment nul, $\mathcal{M}_{\vec{f}'} = 0$ (3);

— la force $\vec{F} = I\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B}$, est verticale, vers le bas (voir α), son module $F = I \cdot AC \cdot B \cdot |\sin(\overrightarrow{AC}, \vec{B})| = IdB$. Comme $\vec{F}$ est perpendiculaire à AC, donc à OJ, son moment par rapport à Δ est $\mathcal{M}_{\vec{F}} = -F \cdot OJ = -IdB\ell$ (4).

• Étudions l'équilibre de la balance en fonctionnement, AM horizontal.

La balance est soumise à $\vec{P}_B$: $\vec{f}$; $\vec{f}'$; $\vec{F}$; $\vec{R}'$, réaction de l'axe; et à $\vec{P}$.

Par rapport à Δ, $\mathcal{M}_{\vec{P}_B} + \mathcal{M}_{\vec{f}} + \mathcal{M}_{\vec{f}'} + \mathcal{M}_{\vec{F}} + \mathcal{M}_{\vec{R}'} + \mathcal{M}_{\vec{P}} = 0$.

D'après (1), (2) et (3) $\mathcal{M}_{\vec{P}_B} = \mathcal{M}_{\vec{f}} = \mathcal{M}_{\vec{f}'} = 0$.

D'après (4) $\mathcal{M}_{\vec{F}} = -IdB\ell$.

$\mathcal{M}_{\vec{R}'} = 0$ car $\vec{R}'$ est appliqué sur l'axe Δ.

$\mathcal{M}_{\vec{P}} = +P \cdot OM = mg\ell'$ (car $\vec{P}$ vertical est perpendiculaire à OM horizontal).

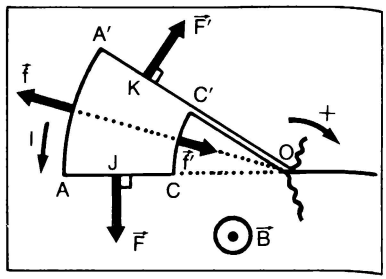
Finalement $\qquad IdB\ell = mg\ell'$.

γ) D'après la condition d'équilibre précédente :

$$B = \frac{mg\ell'}{Id\ell}$$

la balance de Cotton permet de mesurer un champ magnétique.
Numériquement $B = 8{,}37 \cdot 10^{-2}$ T.

b) Présentation des forces de Laplace : ces forces sont perpendiculaires à $\vec{B}$, donc dans le plan de la figure.



— Sur OC' et sur C'O, les forces non indiquées sur la figure se compensent (elles ont le même module, même direction, même point de localisation et des sens opposés : leur résultante et leur moment total sont nuls).

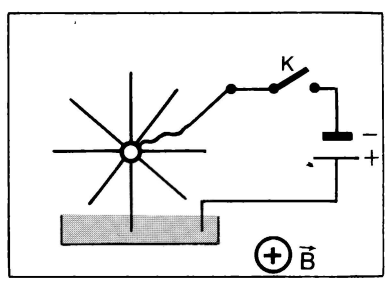
— Sur les arcs A'A et CC', les forces perpendiculaires à ces arcs de centre O ont des supports qui passent par O : leur moment est nul.

— Sur AC, la force $\vec{F}$ a un moment par rapport à Δ, $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = -Id\ell B$ (voir *a*)).

— Sur C'A', la force $\vec{F}' = I\,\overrightarrow{C'A'} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire à A'C'; a le sens indiqué sur la figure; a pour module $F' = I \cdot C'A' \cdot B = IdB$ puisque $C'A' = CA$; est localisée en K milieu de A'C'; a pour moment par rapport à Δ $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}'}} = +F' \cdot OK$, puisque $\vec{F}' \perp OK$, soit $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}'}} = +Id\ell B$ puisque $OK = OJ = \ell$. Ce moment est opposé à celui de $\vec{F}$.

— Par suite la somme des moments des forces électromagnétiques (ou de Laplace) agissant sur la balance est nulle : il n'est pas possible de mesurer $\vec{B}$ car l'équilibre de la balance n'est pas modifié par ces forces.

E 108. *(Roue de Barlow)*
Une roue est constituée de rayons rigides en cuivre, de même longueur R, *régulièrement répartis. Les rayons peuvent pénétrer, les uns après les autres, très légèrement, dans une nappe de mercure. Cette roue est mobile autour d'un axe* Δ *horizontal passant par son centre.*



a) *Toute la roue est baignée par un espace champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *perpendiculaire à son plan. Elle est immobile.*

α) *On abaisse l'interrupteur* K, *qu'observe-t-on?*

β) *La roue tourne à* 75 $tr \cdot min^{-1}$ *lorsque* $I = 8{,}5$ A *et* $B = 0{,}02$ T. *Calculer la puissance de la force électromagnétique.* $R = 9$ cm.

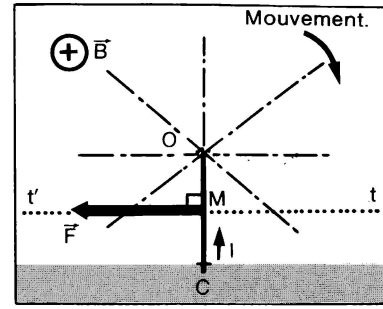
b) *Uniquement la moitié inférieure de la roue est baignée par le champ précédent, qu'observe-t-on?*

c) *Maintenant uniquement le quart inférieur de la roue est baigné par le champ, qu'observe-t-on?*

S 108. *a*) α) • Si aucun rayon ne touche le mercure, le circuit reste ouvert : on n'observe rien.

• Supposons qu'un rayon touche le mercure en C. Lorsqu'on abaisse l'interrupteur K, un courant le traverse dans le sens C vers O. Ce rayon, baigné entièrement par le champ magnétique, subit une force de Laplace

$$\vec{F} = I\overrightarrow{CO} \wedge \vec{B}.$$



— Direction :
$\vec{F} \perp \vec{B}$, donc $\vec{F}$ est dans le plan de la roue,
$\vec{F} \perp \overrightarrow{CO}$, donc $\vec{F}$ a la direction t't.
— Sens : le trièdre $(\overrightarrow{CO}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct, donc $\vec{F}$ est dirigée vers la gauche.
— Module : $F = I \cdot CO \cdot B\,|\sin(\overrightarrow{CO}, \vec{B})| = IRB$.
— Point de localisation (ou d'application) : la force est uniformément répartie sur CO, on peut la remplacer par une force localisée en M, milieu de CO.
• Sous l'action de $\vec{F}$ le rayon, donc la roue, tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Lorsque le rayon sort du mercure, il est relayé par le rayon suivant et ainsi de suite : la rotation est permanente.

β) • Soit $\overrightarrow{v_M}$ le vecteur vitesse du point d'application de M, par rapport à la Terre.
La puissance de $\vec{F}$ est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{v_M} = Fv_M$ puisque $\overrightarrow{v_M}$ et $\vec{F}$ ont même direction et sens.

Soit ω la vitesse angulaire de la roue : $v_M = OM \cdot \omega = \dfrac{R}{2}\omega$ (revoir $\mathcal{M}$ 5).

Par suite $\mathcal{P} = \dfrac{FR\omega}{2} = \dfrac{IR^2B\omega}{2}$.

• Application numérique $\omega = \dfrac{75}{60}\ \text{tr}\cdot\text{s}^{-1} = \dfrac{75}{60} \times 2\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 7{,}85\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

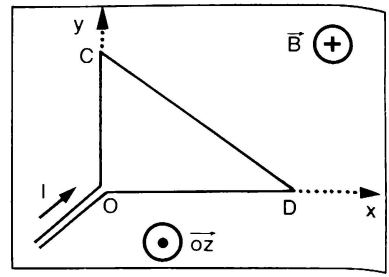
D'où $\mathcal{P} = 5{,}4 \cdot 10^{-3}$ W.
• Remarques :
— on aurait pu écrire $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{\vec{F}} \cdot \omega = F \cdot OM \cdot \omega$;
— il est évident que si la roue tourne à vitesse constante c'est que les forces résistantes sont telles que $\Sigma\mathcal{M} = 0$ par rapport à Δ.

b) Le rayon en contact avec le mercure est encore totalement baigné par le champ magnétique, la force de Laplace est inchangée : la roue tourne dans le même sens et à la même vitesse (en supposant bien sûr qu'aucun facteur, autre que l'étendue du champ, n'ait été changé).

c) (Rédaction abrégée.)
La force de Laplace $\vec{F'} = I\overrightarrow{CM} \wedge \vec{B}$, elle a même direction et sens que $\vec{F}$: la roue tourne encore dans le sens des aiguilles d'une montre. Elle est appliquée au milieu M' de MC. Maintenant $F' = I \cdot CM \cdot B = \dfrac{IRB}{2}$ et $v_{M'} = OM' \cdot \omega = \dfrac{3R}{4}\omega$, par suite la puissance $\mathcal{P}'$ de $\vec{F'}$ est $\mathcal{P}' = \vec{F'} \cdot \overrightarrow{v_{M'}} = \dfrac{IRB}{2} \cdot \dfrac{3R\omega}{4} = \dfrac{3}{8}IR^2B\omega$.

Comme $\dfrac{3}{8} < \dfrac{1}{2}$, $\mathcal{P}' < \mathcal{P}$: la roue va tourner moins vite.

E 109. *Un circuit* OCD *est constitué de trois parties rectilignes* OC, CD *et* DO *formant un triangle rectangle pratiquement fermé en* O. *Il et plongé dans un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *perpendiculaire au plan du triangle.*

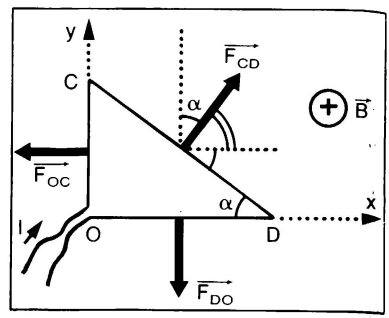


a) *Déterminer les coordonnées des forces électromagnétiques dans le système d'axe* (O, x, y, z).

b) *Vérifier que* $\Sigma\vec{F}=\vec{0}$ ($\vec{F}$: *force électromagnétique*).

c) *En admettant que* $\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u'}\wedge\vec{v}=(\vec{u}+\vec{u'})\wedge\vec{v}$ *démontrer vectoriellement la propriété précédente. La généraliser.*

S 109. *a*) • Les forces de Laplace sont perpendiculaires à $\vec{B}$ donc dans le plan du triangle, elles ont toutes une coordonnée nulle sur l'axe Oz.



• $\overrightarrow{F_{OC}}=I\overrightarrow{OC}\wedge\vec{B}$ est parallèle à Ox, de sens contraire, ses coordonnées sur Ox et Oy sont :

$$\overrightarrow{F_{OC}}\begin{vmatrix}-I\cdot OC\cdot B\\0\end{vmatrix}$$

• $\overrightarrow{F_{DO}}=I\cdot\overrightarrow{DO}\wedge\vec{B}$ est parallèle à Oy, de sens contraire, ses coordonnées sont :

$$\overrightarrow{F_{DO}}\begin{vmatrix}0\\-I\cdot OD\cdot B\end{vmatrix}$$

• $\overrightarrow{F_{CD}}=I\overrightarrow{CD}\wedge\vec{B}$ est perpendiculaire à CD, $\overrightarrow{F_{CD}}$ fait avec Oy l'angle α, son module est $F_{CD}=I\cdot CD\cdot B$, ses coordonnées sont :

$$\overrightarrow{F_{CD}}\begin{vmatrix}F_{CD}\sin\alpha=I\cdot CD\cdot B\cdot\sin\alpha\\F_{CD}\cos\alpha=I\cdot CD\cdot B\cdot\cos\alpha\end{vmatrix}$$

Dans le triangle rectangle OCD, $\sin\alpha=\dfrac{OC}{CD}$ et $\cos\alpha=\dfrac{OD}{CD}$, reportons dans les coordonnées de $\overrightarrow{F_{CD}}$:

$$\overrightarrow{F_{CD}}\begin{vmatrix}I\cdot CD\cdot B\cdot\dfrac{OC}{CD}=I\cdot OC\cdot B\\I\cdot CD\cdot B\cdot\dfrac{OD}{CD}=I\cdot OD\cdot B\end{vmatrix}$$

b) $\Sigma\vec{F}=\overrightarrow{F_{OC}}+\overrightarrow{F_{CD}}+\overrightarrow{F_{DO}}$ a pour coordonnées :
— sur l'axe des x : $-I\cdot OC\cdot B+I\cdot OC\cdot B+0=0$
— sur l'axe des y : $0+I\cdot OD\cdot B-I\cdot OD\cdot B=0$
— sur l'axe des z : $0+0+0=0$.
Par suite $\Sigma\vec{F}=\vec{0}$.

c) • Vectoriellement $\Sigma\vec{F} = I\cdot\overrightarrow{OC}\wedge\vec{B} + I\cdot\overrightarrow{CD}\wedge\vec{B} + I\overrightarrow{DO}\wedge\vec{B}$

$= I\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO})\wedge\vec{B}$

$= I\cdot\vec{0}\wedge\vec{B} = 0.$

• Généralisation :

— le circuit n'a pas besoin d'être un triangle rectangle, il peut être un triangle quelconque;

— le circuit peut être un rectangle (il faut considérer un vecteur de plus);

— le circuit fermé peut avoir finalement une forme quelconque;

— le champ magnétique doit être uniforme, il peut être d'orientation quelconque par rapport au circuit.

M 45 Résultante des forces électromagnétiques s'exerçant sur un circuit fermé.

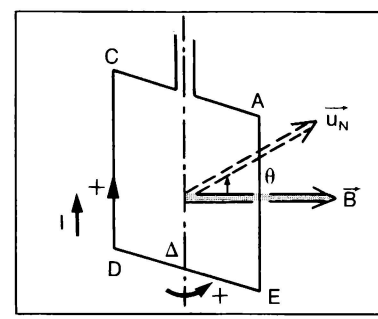
• Lorsqu'un **circuit fermé** (ou pratiquement fermé) est baigné par un champ magnétique **uniforme,** la somme vectorielle des forces de Laplace qui s'exercent sur ce circuit est nulle.

• Ces forces peuvent cependant avoir une action car leur moment total n'est pas forcément nul : le circuit pourra avoir tendance à tourner.

E 110. *Un cadre rectangulaire rigide* ACDE *comprend* N = 40 *spires. Il est suspendu par des fils souples de constante de torsion négligeable : le cadre peut ainsi tourner librement autour de l'axe vertical* Δ *déterminé par ces fils souples.*

Les côtés AC *et* DE *sont horizontaux et ont pour longueur* a = 6 cm, *les côtés* CD *et* AE *sont verticaux et ont pour longueur* b = 10 cm.

On choisit un sens positif suivant le conducteur du cadre (noté par une flèche portée par le conducteur, accompagnée de +*) qui permet de définir le vecteur unitaire normal au cadre* $\overrightarrow{u_N}$.



Le cadre est baigné par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ *horizontal de module* $B = 10^{-2}$ T.

a) *Le cadre est maintenu à la main, immobile, dans une position telle que l'angle orienté, mesuré suivant le sens direct indiqué autour de* Δ, $(\vec{B}, \overrightarrow{u_N}) = \theta = \frac{\pi}{6}$ rad. *On envoie un courant continu dans le sens positif, d'intensité* I = 0,5 A.

α) *Évaluer la résultante* $\vec{\mathcal{R}}$ *des forces électromagnétiques agissant sur le cadre.*

β) *Évaluer le moment résultant* $\overline{\Gamma_\Delta}$ *(mesuré positivement dans le sens direct) des forces électromagnétiques, en fonction de* I, N, B, θ *et de la surface* S *du cadre.*

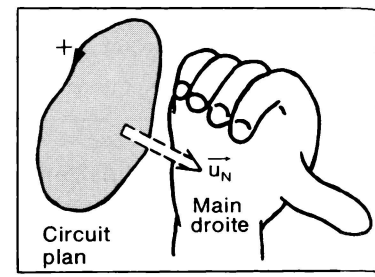
Faire l'application numérique par $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad.

γ) *Comment s'appelle le type d'action précédent?*

b) *On lâche le cadre, que fait-il? Dans la position d'équilibre stable, que peut-on* dire *du vecteur* $\vec{B}$ *relativement aux faces du cadre?*

46 **Vecteur unitaire normal à un circuit plan orienté.**

Soit un circuit plan muni d'un sens positif (flèche portée par le conducteur, éventuellement accompagnée de +).
On appelle vecteur unitaire normal $\vec{u_N}$ (ou $\vec{n}$) :
— un vecteur unitaire;
— un vecteur normal au plan du circuit;
— un vecteur de sens donné par la règle de la main droite.



S 110. *a*) α) Les quatre forces électromagnétiques sont, en remarquant que le courant a le sens AEDC :

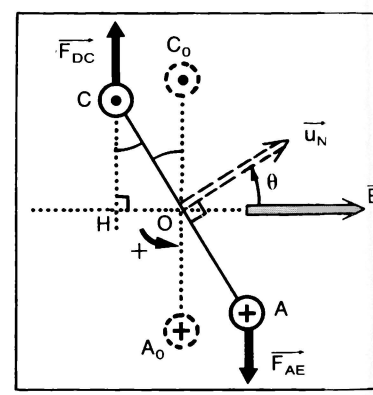
$\overrightarrow{F_{CA}} = NI\overrightarrow{CA} \wedge \vec{B}$, $\overrightarrow{F_{AE}} = NI\overrightarrow{AE} \wedge \vec{B}$,
$\overrightarrow{F_{ED}} = NI\overrightarrow{ED} \wedge \vec{B}$, $\overrightarrow{F_{DC}} = NI\overrightarrow{DC} \wedge \vec{B}$.

Comme $\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{F_{ED}} = -\overrightarrow{F_{CA}}$.

Comme $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{F_{DC}} = -\overrightarrow{F_{AE}}$.

Par suite $\vec{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F_{CA}} + \overrightarrow{F_{AE}} + \overrightarrow{F_{ED}} + \overrightarrow{F_{DC}} = \vec{0}$. (On retrouve ce que nous avons énoncé dans *M* 45.)

β) • Évaluons les moments par rapport à Δ de chacune des 4 forces précédentes, mesurés positivement dans le sens direct.



• $\overrightarrow{F_{CA}}$ est localisée au milieu de AC, c'est-à-dire sur Δ : son moment est nul. (On peut dire aussi que $\overrightarrow{F_{CA}} \perp \vec{B}$ et $\overrightarrow{F_{CA}} \perp$ CA est donc verticale, parallèle à Δ.)

• De même $\overrightarrow{F_{ED}}$ a un moment nul.

• Pour évaluer le moment de $\overrightarrow{F_{DC}}$ il nous faut d'abord préciser ses caractéristiques (le plan de la figure est horizontal, l'axe Δ est perpendiculaire en O à ce plan).

— Direction de $\overrightarrow{F_{DC}}$: $\overrightarrow{F_{DC}} \perp \overrightarrow{DC}$ est dans le plan de la figure;

$\overrightarrow{F_{DC}} \perp \vec{B}$ a la direction CH.

— Sens de $\overrightarrow{F_{DC}}$: le trièdre $(\overrightarrow{DC}, \vec{B}, \overrightarrow{F_{DC}})$ est direct : $\overrightarrow{F_{DC}}$ a le sens H vers C.

— Module de $\overrightarrow{F_{DC}}$: $F_{DC} = N \cdot I \cdot DC \cdot B \left|\sin(\overrightarrow{DC}, \vec{B})\right| = NIbB$.

— Le bras de levier de $\overrightarrow{F_{DC}}$ est OH. Dans le triangle rectangle CHO, on retrouve θ en C : $\sin\theta = \dfrac{OH}{OA}$, soit $OH = \dfrac{a}{2}\sin\theta$.

Le moment de $\overrightarrow{F_{DC}}$ est donc $\overrightarrow{\mathcal{M}_{F_{DC}}} = -F_{DC} \cdot OH = -NIbB\dfrac{a}{2}\sin\theta$. Nous admettrons que l'expression démontrée à partir du cas particulier représenté sur la figure ($\theta > 0$ et aigu) est valable quel que soit θ (positif, négatif, aigu, obtu).

• Un calcul identique montre que $\overrightarrow{\mathcal{M}_{F_{AE}}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{F_{DC}}}$.

• Le moment résultant $\overline{\Gamma_\Delta} = 0 + 0 - 2NIbB\dfrac{a}{2}\sin\theta = -NISB\sin\theta$, en désignant par S la surface du cadre ab.

• Application numérique : pour $\theta = +\dfrac{\pi}{6}$ rad, $\overline{\Gamma_\Delta} = -6 \cdot 10^{-4}$ N·m.

γ) En résumé l'action des forces électromagnétiques sur le cadre a une résultante nulle, un moment résultant non nul : c'est un couple.

b) • Quand on lâche le cadre, celui-ci est soumis au couple électromagnétique, à la tension $\vec{\mathcal{C}}$ des 2 fils de suspension, à son poids $\vec{P}$. Les forces $\vec{\mathcal{C}}$ et $\vec{P}$, parallèles à l'axe Δ, ont des moments nuls. Seul le couple électromagnétique a un effet de rotation.

• Sous l'action de ce couple, à partir de la position $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ rad, comme alors $\overline{\Gamma_\Delta}$ est négatif, le cadre se met en mouvement dans le sens des aiguilles d'une montre.

• Finalement le cadre s'immobilise lorsque $\overline{\Gamma_\Delta} = 0$, c'est-à-dire lorsque $\sin\theta = 0$. A priori deux positions sont possibles, $\sin\theta$ étant nul pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ rad. De lui-même, après des oscillations, le cadre s'arrête pour $\theta = 0$ (position A_0C_0 sur la figure) car l'équilibre est alors stable. En effet supposons que l'on écarte le cadre à partir de $\theta = 0$, d'un angle θ petit, alors en assimilant θ et $\sin\theta$ (revoir $\mathcal{M}$ 40), le moment du couple s'écrit $\overline{\Gamma_\theta} = -NISB\theta$. Si $\theta > 0$, $\overline{\Gamma_\theta} < 0$; si $\theta < 0$, $\overline{\Gamma_\theta} > 0$. Dans les deux cas le couple électromagnétique ramène vers la position $\theta = 0$ qui correspond à l'équilibre stable.
(La position $\theta = \pi$ correspond à un équilibre instable.)

• Considérons la position d'équilibre stable $A_0E_0D_0C_0$. D'après la règle de la main droite, les doigts autres que le pouce tournant dans le sens du courant, le pouce nous indique le côté face nord. On constate que $\vec{B}$ sort par la face nord, perpendiculairement à celle-ci.

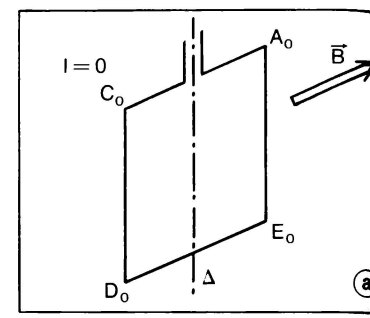
$\mathcal{M}$ 47 Action d'un champ magnétique uniforme sur un cadre.

• Un cadre plan parcouru par un courant continu, baigné par un champ magnétique uniforme est soumis à un couple électromagnétique de résultante nulle, de moment résultant $\overline{\Gamma_\Delta}$ dépendant de la position du cadre.

• Lorsque le cadre tourne librement autour de Δ, il s'oriente dans une position d'équilibre stable telle que $\vec{B}$ sorte par sa face nord, perpendiculairement à celle-ci.
• Il est souvent préférable de redémontrer l'expression du couple électromagnétique $\overline{\Gamma_\Delta}$ (c'est parfois explicitement demandé). On peut parfois utiliser la formule suivante valable si :
— le champ magnétique $\vec{B}$ est le même en tous les points du cadre (ce qui est réalisé bien sûr dans le cas d'un champ uniforme mais aussi dans un champ radial : voir E 111 *b*));
— le sens + le long du fil qui conditionne le sens de $\vec{u_N}$ est le sens du courant;
— les angles et les moments sont mesurés positivement dans le même sens autour de Δ;

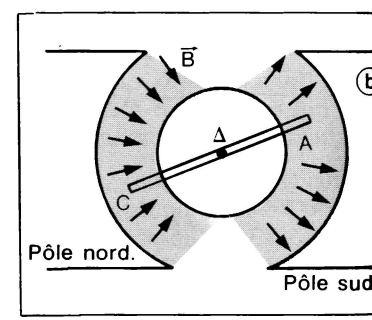
$$\overline{\Gamma_\Delta} = -NISB \sin(\vec{B}, \vec{u_N}).$$

E 111. *Un cadre rectangulaire rigide* ACDE *comprend* N = 400 *spires. Il est suspendu par des fils conducteurs de constante de torsion totale* $C = 2 \cdot 10^{-3}$ N·m·rad^{-1}. *Le cadre peut tourner autour de l'axe* Δ *déterminé par ces fils de torsion.*
Les côtés AC *et* DE *sont horizontaux et ont pour longueur* a = 6 cm, *les côtés* CD *et* AE *sont verticaux et ont pour longueur* b = 10 cm.



a) *Le cadre est baigné par un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *horizontal de module* $B = 10^{-1}$ T.

Lorsque l'intensité du courant qui parcourt le fil est nulle, le cadre a une position d'équilibre $A_0E_0D_0C_0$ *telle que* $\vec{B}$ *soit parallèle à* $\overrightarrow{C_0A_0}$ *et de même sens (figure* (a)*).*
On envoie un courant continu dans le fil du cadre dans le sens AEDC. *Le cadre tourne de 30° à partir de* $A_0E_0D_0C_0$ *et s'équilibre. Quelle est l'intensité du courant? A quoi peut servir un tel dispositif?*



b) *Le cadre précédent maintenu par les mêmes fils est maintenant baigné par un champ magnétique radial (dû à un aimant dont les surfaces polaires sont des portions d'un cylindre d'axe* Δ, *ces pôles entourant un noyau de fer cylindrique d'axe* Δ).
Le vecteur $\vec{B}$ *en tout point de l'espace représenté en gris est horizontal, a son support qui passe par* Δ, *a pour module* $B = 10^{-1}$ T.
On lance un courant continu dans le sens AEDC, *d'intensité* $I = 10^{-2}$ A.
De quel angle le cadre tourne-t-il avant de s'équilibrer?

48 **Couple de torsion d'un fil.**

• Un fil métallique tordu d'un angle $|\theta|$ a tendance à revenir vers sa position au repos, en exerçant un couple de torsion proportionnel à $|\theta|$:

$$\Gamma_t = C|\theta|.$$

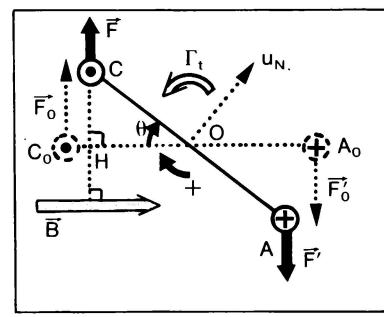
C s'appelle la constante de torsion du fil, elle s'exprime en $N \cdot m \cdot rad^{-1}$.

• Si on mesure θ et $\overline{\Gamma_t}$ algébriquement suivant le même sens positif :

$$\overline{\Gamma_t} = -C\theta.$$

• Un ressort spiral se comporte comme un fil de torsion.

§111. *a*) • Présentation de la démarche : montrer que dans la position initiale $A_0E_0D_0C_0$ les fils de torsion sont au repos; présenter les 4 forces de Laplace s'exerçant sur les côtés du cadre, évaluer le moment du couple qu'elles constituent; écrire la condition d'équilibre du cadre sous l'action du couple électromagnétique et du couple de torsion.



• Lorsque $I = 0$, le cadre est soumis à la tension $\vec{\mathcal{C}}$ des fils, au couple de torsion $\Gamma_{t,0}$, à son poids $\vec{P}$: $\overline{\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{C}}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} + \overline{\Gamma_{t,0}} = 0$.

Comme $\vec{\mathcal{C}}$ et $\vec{P}$ sont parallèles à Δ, leurs moments sont nuls. Par suite $\overline{\Gamma_{t,0}} = 0$: les fils de torsion sont au repos.

Conséquence : repérons le cadre par l'angle $(\overline{OC_0}, \overline{OC}) = \theta$ rad, mesuré positivement dans le même sens que les moments, ici dans le sens des aiguilles d'une montre; lorsque le cadre est dans la position repérée par θ, les fils sont donc tordus de θ.

• *Calcul direct du couple électromagnétique* $\overline{\Gamma_\Delta}$. Le courant a le sens AEDC, les forces de Laplace à considérer sont :
— d'une part $\vec{f} = NI\overrightarrow{CA} \wedge \vec{B}$ et $f' = NI\overrightarrow{ED} \wedge \vec{B}$ qui, s'appliquant sur Δ, ont des moments nuls;
— d'autre part $\vec{F} = NI\overrightarrow{DC} \wedge \vec{B}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{DC}$ et à $\vec{B}$, de module $F = NIbB$, de moment $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = +F \cdot OH = +NIbB\dfrac{a}{2}\cos\theta$ et $\vec{F'} = NI\overrightarrow{AE} \wedge \vec{B}$ de même moment que $\vec{F}$. Par suite $\overline{\Gamma_\Delta} = NIbBa\cos\theta = NISB\cos\theta$.

• *Autre solution : utilisation de la formule* $\overline{\Gamma_\Delta} = -NISB\sin(\vec{B}, \vec{u_N})$ valable puisque le champ magnétique est uniforme (prenons le sens + dans le sens

du courant, $\overrightarrow{u_N}$ est tel que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{u_N}) = +\frac{\pi}{2}$, le sens positif pour les angles et les moments étant le sens des aiguilles d'une montre).

$(\vec{B}, \overrightarrow{u_N}) = (\vec{B}, \overrightarrow{OC_0}) + (\overrightarrow{OC_0}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{u_N})$

$(B, \overrightarrow{u_N}) = -\pi + \theta + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \theta.$

Comme $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\cos\theta$, $\overline{\Gamma_\Delta} = NISB\cos\theta$.

- Le cadre est soumis aussi au couple de torsion Γ_t de moment $\overline{\Gamma_t} = -C\theta$.
- Lorsque le cadre s'immobilise en position d'équilibre :

$\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{G}}} + \overline{\Gamma_\Delta} + \overline{\Gamma_t} = 0.$

Par suite $NISB\cos\theta - C\theta = 0$, d'où $I = \frac{C\theta}{NSB\cos\theta}$.

- Application numérique :

le cadre tourne de 30°, donc $\theta = 30° = \frac{30 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ rad.

D'où $I = 5{,}04 \cdot 10^{-3}$ A = 5,04 mA.

- Cet appareil peut servir à mesurer l'intensité d'un courant. Éventuellement associé à des résistors en parallèle (shunts) il peut constituer un ampèremètre. Associé à un ou des résistors en série, de grande résistance, il peut constituer un voltmètre.

b) La démarche est identique.

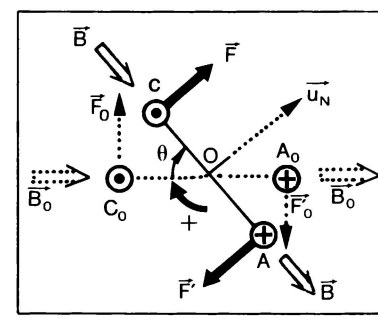
- Dans la position initiale $A_0B_0D_0C_0$, lorsque $I = 0$, les fils de torsion sont encore au repos.
- *Calcul direct du couple électromagnétique* $\overline{\Gamma_\Delta}$.

Les forces sur les côtés horizontaux sont nulles puisque le champ qui les baigne (partiellement) leur est parallèle.

La force $\vec{F}$ sur le côté DC, $\vec{F} = NI\overrightarrow{DC} \wedge \vec{B}$ a des caractéristiques nouvelles.

— Direction : $\vec{F} \perp \overrightarrow{DC}$ donc est dans le plan de la figure;

$\vec{F} \perp \vec{B}$ donc $\vec{F} \perp \overrightarrow{AC}$.



— Moment par rapport à Δ : le bras de levier est OC puisque $\vec{F} \perp AC$, donc avec le sens + dans le sens des aiguilles d'une montre $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = +F \cdot OC = NIbB\frac{a}{2}$.

La force $\vec{F}'$ sur AE a même moment que $\vec{F}$.

Le couple électromagnétique a donc un moment $\overline{\Gamma_\Delta} = NIbBa = NISB$: ce moment est indépendant de θ, c'est l'avantage d'un champ radial sur un champ uniforme.

- *Utilisation de la formule* $\overline{\Gamma_\Delta} = -NISB\sin(\vec{B}, \overrightarrow{u_N})$ valable car le champ magnétique qui baigne le cadre est partout le même.

(Le sens + sur le fil est le sens du courant, angles et moments sont mesurés positivement dans le sens des aiguilles d'une montre.)

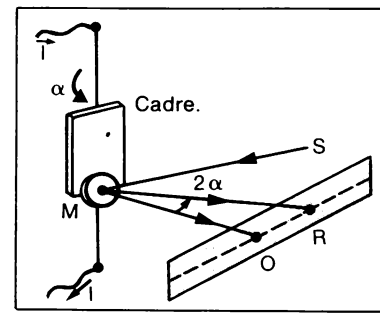
$(\vec{B}, \vec{u_N}) = -\frac{\pi}{2}$ quel que soit θ. Comme $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$, $\overline{\Gamma_\Delta} = \text{NISB}$.

• A l'équilibre après une rotation de θ, donc une torsion des fils de θ :

$$\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{C}}}} + \overline{\Gamma_\Delta} + \overline{\Gamma_t} = 0, \quad \text{d'où} \quad \text{NISB} - C\theta = 0.$$

Par suite $$\theta = \frac{\text{NISB}}{C} = 1{,}2 \text{ rad} = 68{,}7°.$$

E 112. *Un cadre rectangulaire comprend* $N = 100$ *spires, de surface chacune* $S = 10 \text{ cm}^2$. *Il est suspendu à un fil de torsion (qui relie en même temps le cadre à un circuit électrique) de constante* $C = 10^{-5}$ N·m·rad^{-1}.



Le cadre tourne autour d'un axe Δ *vertical porté par le fil de torsion.*

Il est baigné par un champ magnétique radial (voir figure (b) de E 111*) dont les vecteurs* $\vec{B}$ *sont horizontaux, ont leurs supports qui passent par* Δ, *ont pour module* $B = 0{,}3$ T.

Sur le cadre est collé un petit miroir plan.

Un rayon lumineux incident, fixe, SM, *frappe en* M *le miroir. Le rayon réfléchi rencontre en* O *une règle transparente lorsque le cadre n'est parcouru par aucun courant. Cette règle est horizontale et perpendiculaire à* MO. *La distance* $MO = D = 0{,}8$ m.

On envoie dans le cadre un courant d'intensité I *inconnue, le point lumineux sur la règle passe de* O *à* R *tel que* $OR = d = 2{,}6$ cm. *Exprimer* I *en fonction de* N, S, B, D, C *et* d *(en remarquant que* d *est petit devant* D*).*

Faire l'application numérique.

Note : lorsqu'un miroir tourne de α, *le rayon réfléchi, correspondant à un rayon incident fixe, tourne de* 2α.

S 112. • Pour $I = 0$, le fil de torsion est au repos : lorsque le cadre tourne de α, le fil est donc tordu de α.

• Le cadre est en équilibre sous l'action de son poids $\vec{P}$ (de moment nul par rapport à Δ); de la tension $\vec{\mathcal{C}}$ des fils (de moment nul, car $\vec{\mathcal{C}}$ s'applique sur Δ); de la torsion de fil de moment $\overline{\Gamma_t} = -C\alpha$ (α étant en rad, le sens positif pour mesurer α et $\overline{\Gamma_t}$ étant le sens de la rotation : de cette façon $\alpha > 0$); du couple électromagnétique $\overline{\Gamma_\Delta}$.

• Pour évaluer $\overline{\Gamma_\Delta}$ utilisons, puisque le champ qui baigne le cadre est partout le même, l'expression $\overline{\Gamma_\Delta} = -\text{NISB} \sin(\vec{B}, \vec{u_N})$. (On peut montrer comme en S 111 *b*) que $(\vec{B}, \vec{u_N}) = -\frac{\pi}{2}$, il faut dans ce cas faire une figure et dire que $\vec{u_N}$ a été déterminé en prenant le sens + dans le sens du courant.)

On peut aussi raisonner ainsi : $|\overline{\Gamma_\Delta}| = \text{NISB} |\sin(\vec{B}, \vec{u_N})|$. Comme le champ est

radial, $|(\vec{B}, \overrightarrow{u_N})| = \frac{\pi}{2}$, donc $|\overline{\Gamma_\Delta}| = NISB$. Comme le cadre tourne sous l'action de $\overline{\Gamma_\Delta}$ dans le sens positif, $\overline{\Gamma_\Delta}$ est positif. Finalement $\overline{\Gamma_\Delta} = NISB$.

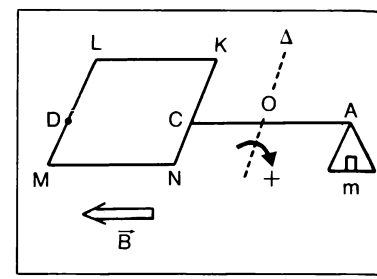
- La condition d'équilibre du cadre est donc $NISB - C\alpha = 0$.

- Comme la règle est perpendiculaire à MO, dans le triangle MOR rectangle en O : $\text{tg } 2\alpha = \frac{d}{D}$. Le rapport $\frac{d}{D}$ étant petit devant 1, $\text{tg } 2\alpha \simeq 2\alpha$ (rad) (voir ℳ 40).

Par suite $\alpha = \frac{d}{2D}$.

- Reportons dans ① : $I = \frac{C\alpha}{NSB} = \frac{Cd}{2NSBD} = 5{,}42 \cdot 10^{-6}$ A $= 5{,}42$ μA (voir ℳ 26 pour les sous-multiples).

E 113. *Un cadre rectangulaire formé de* N *spires ayant chacune une surface* S *est fixé à l'extrémité du fléau rectiligne d'une balance, mobile autour d'un axe* Δ *fixe et horizontal coupant le fléau en* O.
L'autre extrémité A *du fléau supporte un plateau.*
Le cadre est placé dans un champ magnétique uniforme de vecteur champ $\vec{B}$ *horizontal, parallèle au fléau dont le sens est indiqué sur la figure.*
En l'absence de courant dans le cadre, le fléau est donc horizontal.
On néglige l'action du champ magnétique terrestre.
Un courant électrique continu d'intensité I *parcourant le cadre,*



a) *indiquer sur un schéma le sens que doit avoir ce courant pour que le cadre soit entraîné vers le bas;*

b) *sachant que le fléau de la balance est ramené à sa position initiale grâce à une masse* m *placée dans le plateau, évaluer* I *en fonction de* N, S, m, g, OA = d *et* B.

(Note : on pourra d'abord faire intervenir a = KL = MN, b = LM = NK *et* ℓ = OC. *On constatera que* ℓ *ne joue pas de rôle, que* a *et* b *interviennent par* ab = S.*)*

c) *Application numérique :* N = 20 *spires;* S = 100 cm^2; m = 1,28 g; d = 10,0 cm; g = 9,81 m·s^{-2}; $B = 4 \cdot 10^{-3}$ T; *évaluer* I.

(D'après bac)

S 113. (Nous ne donnons que quelques indications et les réponses.)

a) Sens du courant : KLMN (explications possibles : la force sur le côté LM a le plus grand effet de rotation, elle doit être orientée vers le bas; on peut aussi dire que le cadre doit avoir tendance à tourner pour que $\vec{B}$ sorte par sa face nord, celle-ci doit donc être la face supérieure du cadre).

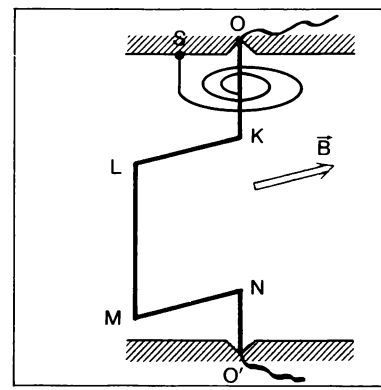
b) • $\overrightarrow{F_{KL}} = \overrightarrow{F_{MN}} = \vec{0}$ car $\vec{B} /\!/ \overrightarrow{KL}$ et à $\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{F_{NK}}$, verticale, vers le haut, module NIbB, moment $+NIbB\ell$.
Par suite $\overline{\Gamma_\Delta} = -NISB$.
Remarque.
• Le champ magnétique étant uniforme, $\overline{\Gamma_\Delta} = -NISB \sin(\vec{B}, \overrightarrow{u_N})$: prenons le sens + dans le sens courant, alors $\overrightarrow{u_N}$ est vertical vers le haut. Mesurons les angles positivement dans le sens + indiqué autour de Δ : $(\vec{B}, \overrightarrow{u_N}) = +\frac{\pi}{2}$.
D'où $\overline{\Gamma_\Delta} = -NISB$: on retrouve l'expression démontrée ci-dessus.
• Équilibre : $\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} + \overline{\mathcal{M}_{\overrightarrow{P_B}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{R}}} + \overline{\Gamma_\Delta} = 0$ ($\overrightarrow{P_B}$: poids de la balance à vide)

$$mgd - NISB = 0$$

$$I = \frac{mgd}{NSB} = 1{,}57 \text{ A}.$$

E 114. *Avec un fil de cuivre dénudé, de diamètre* 2 mm, *on réalise le circuit* OKLMNO′, *coudé à angles droits en* K, L, M *et* N, *muni de deux pivots en* O *et en* O′ *situés sur la même verticale.*
Les côtés horizontaux KL *et* MN *ont pour longueur* a = 10 cm, *le côté vertical* LM *a pour longueur* b = 50 cm.
Un ressort spiral a l'une de ses extrémités fixée sur OK, *l'autre à un point fixe* S.
Le dispositif est baigné par un champ magnétique uniforme de module B = 0,3 T.



a) *Le fil* LM *est maintenu immobile. Il est parcouru par un courant d'intensité* I = 10 A.
On admet que le métal cuivre est constitué d'un cristal d'ions Cu^+ *baignés par des électrons libres.*
Quelle est la force magnétique (ou force de Lorentz) qui agit sur chaque électron libre?
Données : masse volumique du cuivre $\mu = 8\,900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
masse d'un atome de cuivre $m_{Cu} = 1{,}06 \cdot 10^{-25}$ kg.

b) *Lorsque le cadre* OKLMNO′ *n'est parcouru par aucun courant,* $\vec{B}$ *est parallèle à* LK *et a le sens* L *vers* K, *le ressort spiral n'est alors pas tordu.*
On fait passer un courant d'intensité I = 10 A *dans le sens* OKLMNO′. *Le cadre tourne d'un angle* θ *avant de s'équilibrer. On exprimera* θ *en* rad.

α) *Quelle est l'expression du moment total des forces électromagnétiques* $\overline{\mathcal{M}_m}$ *en fonction de* θ?

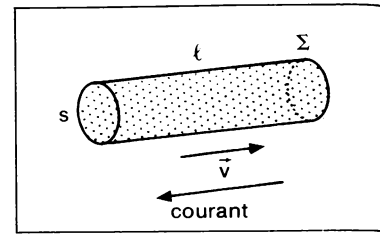
β) *Sachant que la constante de torsion du ressort spiral est* $C = 0{,}2 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$, *déterminer* θ *par une méthode graphique. Il n'y a pas de frottements en* O *et* O′.

γ) *On considère la base* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: Ω, *point fixe;* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, *trois vecteurs unitaires formant un trièdre trirectangle et direct;* $\vec{i}$ *parallèle à* $\vec{B}$ *et de même sens;* $\vec{k}$ *vertical ascendant.*
— *Sachant que* OK = NO′ = c = 15 cm, *détermine le poids du cadre.*
— *Soit* $\vec{R}$ *la force totale de l'action des pivots en* O *et en* O′ *sur le cadre, déterminer à l'équilibre les coordonnées de* $\vec{R}$ *dans la base précédente, puis le module de* $\vec{R}$.
Données :
— *le ressort spiral exerce un couple de torsion sur le cadre, la force de son action est nulle;*
— *l'intensité de la pesanteur* $g = 9{,}8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

S 114. *a*) • Il y a autant d'électrons libres que d'ions Cu^+. Par m^3 de cuivre il y a donc :

$$n = \frac{\mu V}{m_{Cu}} = \frac{8\,900 \times 1}{1{,}06 \cdot 10^{-25}} \simeq 8{,}4 \cdot 10^{28}$$

électrons libres.



• Une portion de fil de longueur ℓ, de section s, comporte $ns\ell$ électrons libres en mouvement à la vitesse constante $\vec{v}$.

Pour passer à travers la section Σ du fil, ces électrons mettent la durée $t = \frac{\ell}{v}$.

Pendant cette durée il passe à travers Σ la quantité d'électricité $q = It = ns\ell e$.

D'où $$I = \frac{ns\ell e}{t} = nsve.$$

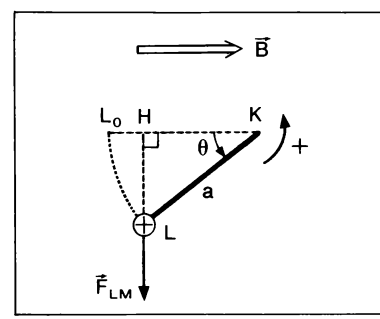
Chaque électron libre a donc la vitesse $\vec{v}$, parallèle au fil, de sens opposé à celui du courant, de module :

$$v = \frac{I}{nse} = 2{,}37 \cdot 10^{-4}\ m \cdot s^{-1}.$$

• Chaque électron subit la force de Lorentz $\vec{f} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$, perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$, de sens tel que le trièdre $(-\vec{v}, \vec{B}, \vec{f})$ soit direct, de module $f = evB\,|\sin(\vec{v}, \vec{B})| = evB = 1{,}14 \cdot 10^{-23}$ N.

Remarque. Chaque électron en mouvement rectiligne uniforme subit une force opposée à $\vec{f}$ due aux charges fixes, inversement chaque électron communique la force $\vec{f}$ aux charges fixes, donc au fil : ce sont ces dernières forces qui constituent la force de Laplace sur le fil.

b) *α*) • La force de Laplace $\overrightarrow{F_{OK}} = I\overrightarrow{OK} \wedge \vec{B}$ s'applique sur l'axe OO′ : son moment est nul. Il en est de même pour $\overrightarrow{F_{NO'}}$.



• $\overrightarrow{F_{KL}} = I\overrightarrow{KL} \wedge \vec{B}$ est verticale car elle est perpendiculaire aux deux horizontales, non parallèles, KL et B : le moment de $\overrightarrow{F_{KL}}$ par rapport à l'axe vertical OO′ est nul. Il en est de même pour $\overrightarrow{F_{MN}}$.

• $\overrightarrow{F_{LM}} = I\overrightarrow{LM} \wedge \vec{B}$ a les caractéristiques suivantes :

— direction : perpendiculaire à LM donc horizontale, perpendiculaire à $\vec{B}$, donc a la direction HL;

— sens : le trièdre $(\overrightarrow{LM}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct, $\vec{F}$ a le sens H vers L;

— module : $F_{LM} = IbB$;

— moment par rapport à OO′ : $\overline{\mathcal{M}_{\vec{F}_{LM}}} = F_{LM} \times KH = IbBa \cos\theta$.

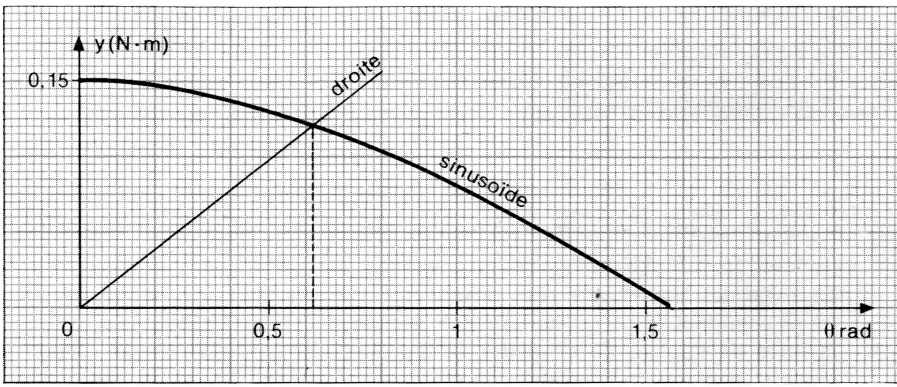
• En résumé le moment total des forces électromagnétiques est $\overline{\mathcal{M}_m} = IbBa \cos\theta = 0{,}15 \cos\theta$ en unités S.I.

β) A l'équilibre du cadre $\overline{\mathcal{M}_m} + \overline{\Gamma_t} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{R}}} = 0$ ($\vec{P}$, poids du cadre; $\vec{R}$, action des supports O et O′; $\overline{\Gamma_t} = -C\theta$, couple de torsion).

$\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} = 0$ car $\vec{P}$ est vertical comme OO′, $\overline{\mathcal{M}_{\vec{R}}} = 0$ car il n'y a pas de frottements en O et O′.

Par suite $\overline{\mathcal{M}_m} + \overline{\Gamma_t} = 0$ d'où $0{,}15 \cos\theta - 0{,}2\theta = 0$. (1)

Traçons dans le même système d'axes les courbes $y = 0{,}15 \cos\theta$ et $y = 0{,}2\theta$, à leur intersection, la relation (1) est satisfaite.



L'abscisse du point d'intersection représentée par 31 mm correspond à l'angle

$\theta = \frac{1}{50} \times 31 = 0{,}62$ rad.

γ) • Le cadre a pour longueur $\ell = 2c + 2a + b = 1$ m. Son volume est ℓs, sa masse $m = \mu \ell s$, son poids $P = \mu \ell s g = 0{,}274$ N.

• Nous ne donnons que des indications :

$\overrightarrow{F_{KL}} + \overrightarrow{F_{MN}} = \vec{0}$.

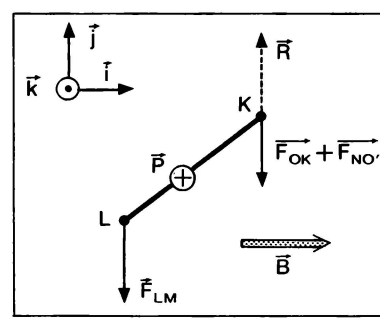
$\overrightarrow{F_{LM}}$, $\overrightarrow{F_{OK}}$ et $\overrightarrow{F_{NO'}}$ sont parallèles à $\vec{j}$; $\vec{P}$ est parallèle à $\vec{k}$.

$\overrightarrow{F_{LM}} + \overrightarrow{F_{OK}} + \overrightarrow{F_{NO'}} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$.

On trouvera $\vec{R}\,(0 ; +IB(b + 2c) ; +P)$.

Numériquement :

$\vec{R}$ (0 ; 2,4 N ; 0,274 N) et R = 2,42 N.



POURQUOI ?

• *J'ai tendance à utiliser la règle des trois doigts de la main droite pour déterminer à la fois la direction et le sens de* $\vec{F}$, *est-ce correct?*

La règle des trois doigts peut effectivement donner une idée de la direction (mais comment respecter parfaitement les angles?) On a besoin pour exploiter la force de Laplace de connaître de façon précise sa direction par rapport à certains éléments géométriques du montage (plan, droite, axe) : il faut préciser mathématiquement cette direction (parallèle à tel plan, perpendiculaire à telle droite, ...), le mieux est donc de partir de l'expression vectorielle de $\vec{F}$.

• *Dans l'expression* $\vec{F} = I\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$, *faut-il tenir compte du champ magnétique créé par le conducteur* MN *parcouru par le courant* I?

Un fil MN parcouru par un courant crée effectivement un champ magnétique (voir chapitre suivant); dans la formule de Laplace $\vec{B}$ désigne le champ créé par une source magnétique autre que le fil MN.

• *Pourquoi la force de Laplace travaille-t-elle alors que la force de Lorentz ne travaille pas?*

La force de Lorentz est une force magnétique qui résulte de l'action directe d'un champ magnétique sur une charge en mouvement.
La force de Laplace a une nature différente : elle est due à l'action des électrons en mouvement, dans le fil baigné par le champ magnétique, sur les charges fixes localisées dans le reste du fil.

• *Dans l'étude de la balance de Cotton, pour la force* $\vec{f}$ *agissant sur l'arc* $\overset{\frown}{A''A}$ (*voir* S 107) *parcouru par un courant de* A'' *vers* A, *vous n'avez pas écrit* $\vec{f} = I\overset{\frown}{A''A} \wedge \vec{B}$, *pourquoi?*

Cette expression n'a pas de sens, en effet $\overset{\frown}{A''A}$ n'est pas un vecteur. (Pour écrire $\vec{f}$ correctement, il faut découper $\overset{\frown}{A''A}$ en une infinité de petits segments de droite $A''A_1$, A_1A_2 ... A_nA et écrire :

$$\vec{f} = I(\overrightarrow{A''A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \ldots \overrightarrow{A_nA}) \wedge \vec{B} \text{ soit finalement } \vec{f} = I\overrightarrow{A''A} \wedge \vec{B}.$$

C'est pour ne pas compliquer que nous n'avons pas donné cette écriture mathématique de $\vec{f}$.)

• *Dans un pourquoi? du chapitre 1, vous expliquez que vous mettrez des barres pour la mesure algébrique d'un vecteur sur un axe, est-ce vrai pour* $\overline{\mathcal{M}_\Delta}$, $\overline{\Gamma_D}$?

A un niveau plus élevé le moment d'une force est un vecteur $\vec{\mathcal{M}}$, lorsqu'on parle de $\overline{\mathcal{M}_\Delta}$ c'est de la mesure algébrique de $\vec{\mathcal{M}}$ sur l'axe Δ qu'il s'agit; la remarque faite dans le chapitre 1 est toujours valable. A ce propos l'usage veut qu'on désigne souvent par $\overline{\Gamma}$ le moment d'un couple (couple électromagnétique, couple de torsion).

• *Le caractère nord-sud des faces d'un cadre dépend-il du sens du courant ou du sens positif choisi?*

C'est le sens du courant qui doit être pris en considération pour déterminer la face nord (de même que c'est lui qui conditionne le sens des forces de Laplace). Le sens du vecteur unitaire normal à un circuit plan $\vec{u_N}$ (ou $\vec{n}$) est conditionné par le sens + choisi (lorsque le courant a un sens connu à priori, on prend bien sûr le sens + dans le sens du courant, c'est ce que nous avons fait, alors $\vec{u_N}$ sort par la face nord).

• *Pourquoi ne pas dire, puisque pour appliquer la formule :*

$$\overline{\Gamma_\Delta} = -\text{NISB} \sin(\vec{B}, \vec{u_N})$$

le sens + est obligatoirement le sens du courant, que $\vec{u_N}$ *est déterminé par la règle de la main droite à partir du sens du courant?*

Nous allons voir dans le prochain chapitre que $\vec{u_N}$ se détermine toujours à partir du sens + choisi pour le circuit plan. Nous avons voulu donner dans $\mathcal{M}$ 46 une définition de $\vec{u_N}$ qui ne soit pas contredite par la suite.

• *Avez-vous un procédé pour vérifier si le couple* $\overline{\Gamma_\Delta}$ *fait intervenir le cosinus ou le sinus de l'angle choisi pour repérer le cadre?*

• Si le champ magnétique est uniforme, $\overline{\Gamma_\Delta}$ dépend d'un angle par un sinus ou un cosinus, si le champ est radial $\overline{\Gamma_\Delta}$ ne dépend pas de l'angle de position.

• Dans le cas d'un champ uniforme, le couple doit être nul lorsque $\vec{B}$ sort perpendiculairement à la face nord : c'est un moyen de vérifier si la formule est bonne.

Exemple : dans S 111 a), $\vec{B}$ sort par la face nord pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: la formule $\overline{\Gamma_\Delta} = \text{NISB} \cos\theta$ indique bien que $\overline{\Gamma_\Delta} = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

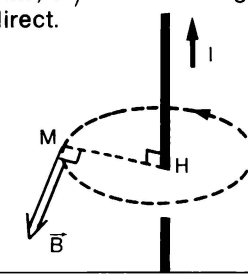
9 LE CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN COURANT

E 115. *Un fil horizontal très long est parcouru par un courant d'intensité* $I = 10$ A. *Soit* M *un point situé à l'aplomb du fil, au-dessus. Le champ magnétique* $\vec{B}$ *en* M *a un module égal à* $10\ B_H$, B_H *composante horizontale du champ magnétique terrestre. Quel est le rayon de la ligne de champ magnétique passant par* M? *Représenter le vecteur* $\vec{B}$ *sur une figure, dont le plan est vertical, perpendiculaire au fil, passant par* M. *Donnée :* $B_H = 2 \cdot 10^{-5}$ T.

M 49 **Champ magnétique créé par un fil infiniment long.**

• Le champ créé par un fil rectiligne, infiniment long, parcouru par un courant continu, n'est pas uniforme : ses lignes de champ sont des cercles ayant pour axe le fil. Pour orienter ces lignes de champ on peut utiliser la règle de la main droite : le pouce pointant dans le sens de I, les doigts courbés nous donnent le sens de la ligne de champ.

$(\vec{I}, \overrightarrow{HM}, \vec{B})$ est trirectangle et direct.



• Le vecteur $\vec{B}$ en un point M est :
— tangent à la ligne de champ passant par M, de rayon $HM = d$, de centre H;
— a le sens de la ligne de champ en M (on peut aussi dire que le trièdre trirectangle $(\vec{I}, \overrightarrow{HM}, \vec{B})$ est direct et appliquer la règle des trois doigts de la main droite);
— a pour module

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d}$$

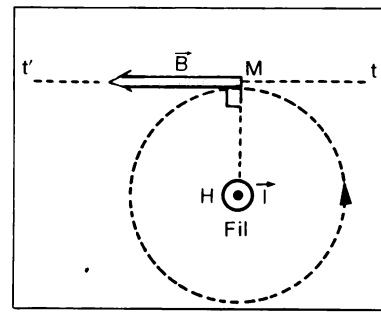
Le coefficient μ_0 s'appelle la « constante magnétique » ou la « perméabilité magnétique du vide » :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ uSI}$$

S 115. Soit d le rayon de la ligne de champ passant par M, le module du champ magnétique en tous points de cette ligne est :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d} = 10\ B_H.$$

D'où $d = \frac{\mu_0 \cdot I}{20\pi B_H} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ I}{20\pi B_H} = 2 \cdot 10^{-8}\ \frac{I}{B_H} = 10^{-2}$ m = 1 cm.



• Le plan de la figure passe par M, il est perpendiculaire au fil en H. La flèche $\vec{I}$, indique le sens du courant. Considérons le trièdre $(\vec{I}, \overrightarrow{HM}, \vec{B})$.
— Ce trièdre est trirectangle donc :
$\vec{B} \perp$ fil, représenté par $\vec{I}$, est dans le plan de la figure;
$\vec{B} \perp \overrightarrow{HM}$, donc à la direction t't.
(On pouvait aussi dire que $\vec{B}$ est tangent au cercle ligne de champ de centre H.)
— Ce trièdre est direct : donc $\vec{B}$, d'après la règle des trois doigts dans la main droite, a le sens t vers t'. (On pouvait aussi dire que $\vec{B}$ a le sens de la ligne de champ orientée par la règle de la main droite.)

E 116. • *Parmi les propositions suivantes certaines sont fausses, lesquelles? Justifier.*

a) *Le champ magnétique créé au centre d'une spire circulaire de rayon* R, *parcourue par un courant d'intensité* I, *a pour valeur* $B = \frac{\mu_0 R}{2I}$.

b) *Deux lignes de champ magnétique, d'une même source, ne se croisent pas.*

c) *Un circuit indéformable est parcouru par un courant d'intensité* $I_1 = 5$ A, *la ligne de champ magnétique passant par un point* M *est rectiligne. On augmente l'intensité du courant qui devient* $I_2 = 10$ A, *la ligne de champ passant par* M *se courbe.*

d) *Un espace champ magnétique, créé par un bobinage, est caractérisé par un ensemble de lignes de champ. On place dans cet espace un morceau de fer, les lignes de champ se déforment en ayant tendance à passer par le fer.*

S 116. *a*) Le champ magnétique $\vec{B}$ créé en un point d'un espace (sans substances ferromagnétiques : fer, nickel, cobalt, ...) par un circuit parcouru par un courant d'intensité I, a un module B proportionnel à I. La formule proposée, où B serait inversement proportionnel à I, est donc fausse.

b) Cette proposition est exacte : si deux lignes d'un champ, créé par une même source, se croisaient en O, cela signifierait qu'au même point O, la source créerait deux champs magnétiques $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$.

c) La forme des lignes de champ magnétique (de façon plus savante on dit « la topographie de l'espace champ ») créé par un circuit parcouru par un courant, ne dépend que de la forme du circuit. Elle ne dépend pas de l'intensité du courant qui traverse le circuit. Cette proposition est donc fausse.

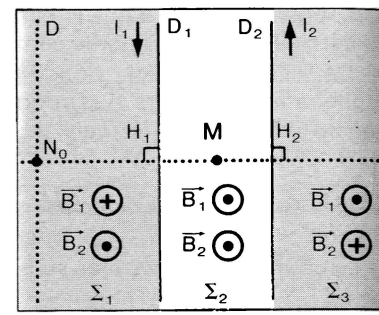
d) Les substances ferromagnétiques sont plus facilement traversées par les lignes de champ magnétique que l'air ou le vide : on dit qu'elles sont plus perméables. Les lignes de champ ont donc effectivement tendance à passer par le morceau de fer, ce faisant elles se rapprochent (on montre que cela signifie alors que le champ magnétique à l'intérieur du morceau de fer est plus grand que dans l'air). La proposition *d*) est donc exacte.

E 117. *Deux fils* D_1 *et* D_2, *rectilignes, parallèles, très longs, sont parcourus par des courants d'intensités* $I_1 = 5$ A *et* $I_2 = 9$ A, *de sens contraires. Les fils sont distants de* $d = 4$ cm.

a) *Soit* M *un point du plan* (D_1, D_2) *équidistant de* D_1 *et* D_2. *Quel est le champ magnétique* $\vec{B}$ *en* M *créé par la source* (D_1, D_2) ?

b) *Montrer que, suivant une droite* D *du plan* (D_1, D_2), *le champ magnétique créé par* (D_1, D_2) *est nul.*

S 117. (Le plan (D_1, D_2) est pris comme plan de la figure.)



a) • Soit H_1 la projection orthogonale de M sur D_1, H_2 la projection sur D_2. Le point M est au milieu de H_1H_2 :

$$H_1M = \frac{d}{2} = H_2M.$$

• En M, le fil D_1 parcouru par le courant d'intensité I_1, crée le champ $\vec{B_1}$ tel que le trièdre $(\vec{I_1}, \overrightarrow{H_1M}, \vec{B_1})$ soit trirectangle et direct.

— Le trièdre est trirectangle donc $\vec{B_1}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{H_1M}$ et à D_1 (représenté par $\vec{I_1}$), donc est perpendiculaire au plan de la figure.

— Le trièdre est direct : donc $\vec{B_1}$ est dirigé vers l'avant.

— Le module de B_1 est $B_1 = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I_1}{H_1M} = \dfrac{\mu_0 I_1}{\pi d}$.

• De même en M, le fil D_2 parcouru par le courant I_2, crée le champ $\vec{B_2}$ perpendiculaire au plan de la figure, pointant vers nous, de module $B_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{\pi d}$.

• La source (D_1, D_2) crée en M, le champ $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$. Les vecteurs $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$ étant parallèles, de même sens, $\vec{B}$ a la même direction, le même sens, son module $B = B_1 + B_2 = \dfrac{\mu_0}{\pi d}(I_1 + I_2) = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \times (5+9)}{\pi \times 4 \cdot 10^{-2}} = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ T.

b) • Soit N un point quelconque du plan des deux fils. Le champ dû aux deux fils $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$.

• ① Quelle que soit la position de N, $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$ ont la même direction : ils sont perpendiculaires au plan de la figure.

• ② Dans les zones Σ_1 et Σ_3 (en gris), $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$ ont des sens opposés (voir figure).

• Soit N_0 le point de la droite passant par H_1 et H_2 où $\vec{B} = \vec{0}$. N_0 est situé à $d_1 = H_1N_0$ de D_1 et $d_2 = H_2N_0$ de D_2. D'après ① et ②, N_0 est soit dans Σ_1 soit dans Σ_3.
Il faut de plus qu'en N_0, les vecteurs $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$ aient même module :

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d_1} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{d_2} \quad \text{soit} \quad \frac{I_1}{d_1} = \frac{I_2}{d_2} \tag{3}$$

• Avec les valeurs numériques $I_1 = 5$ A et $I_2 = 9$ A, d'après ③ on en déduit $d_1 = \frac{5}{9} d_2$: le point N_0 est dans Σ_1, plus près de D_1. Alors $d_2 = d_1 + d$, par suite $d_1 = \frac{5}{9}(d_1 + d)$, d'où $d_1 = \frac{5}{4} d = 5$ cm.

• Tous les points de la droite D passant par N_0, parallèle à D_1 et D_2, ont le même champ magnétique nul qu'en N_0.

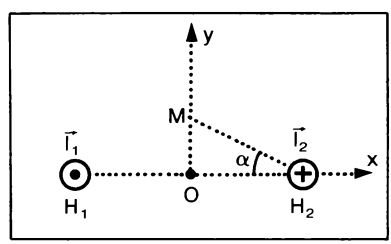
E 118. *Même exercice que précédemment, les courants étant de même sens.*

S 118. (Nous ne donnons que les réponses.)

a) En M, en supposant $\vec{I_1}$ et $\vec{I_2}$ vers le haut de la figure, le vecteur $\vec{B}$
— est perpendiculaire au plan de la figure;
— pointe vers l'avant;
— a pour module $B = \frac{\mu_0}{\pi d}(I_2 - I_1) = 4 \cdot 10^{-5}$ T.

b) • La droite D appartient à la zone Σ_2, elle est située à la distance $d_1 = 1{,}43$ cm de D_1 (remarquer cette fois-ci que pour N_0, $d_1 + d_2 = d$).

E 119. *Deux fils rectilignes F_1 et F_2, très longs, parallèles, sont parcourus par des courants de sens contraires, d'intensités I_1 et I_2.*
Soit un plan P, *perpendiculaire à ces fils qu'il coupe en H_1 et en H_2. Le milieu de H_1H_2 est* O, *la distance $H_1H_2 = 2a = 10$ cm.*
Le plan P *est rapporté à 2 axes perpendiculaires* Ox, *passant par H_1 et H_2, et* Oy. *On considère le champ magnétique en* M, *situé sur* Oy, *du côté positif, et défini par l'angle α qui pourra varier de* 0 *à* 90°.



a) *Quelles sont les coordonnées de $\vec{B_1}$, champ magnétique en* M *dû à F_1?*

b) *Quelles sont les coordonnées de $\vec{B_2}$, champ magnétique en* M *dû à F_2?*

c) *En déduire les coordonnées de $\vec{B}$, champ magnétique en* M *dû à F_1 et F_2.*

d) *Application numérique. Évaluer* B *pour* $\alpha = 30°$; $I_1 = 6$ A; $I_2 = 4$ A.

e) *Comment est dirigé $\vec{B}$ si $I_1 = I_2$?*

S 119. *a*) • Le vecteur $\vec{B_1}$ en M est tel que le trièdre $(\vec{i_1}, \overrightarrow{H_1M}, \vec{B_1})$ soit trirectangle et direct.

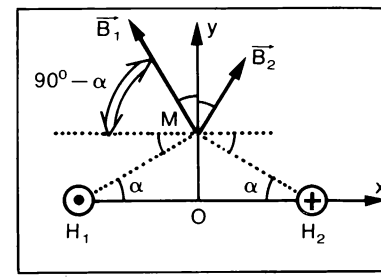
— Le trièdre étant trirectangle :

$\vec{B_1} \perp$ fil représenté par $\vec{i_1}$ est dans le plan P;

$\vec{B_1} \perp H_1M$.

(On peut dire aussi que $\vec{B_1}$ doit être tangent à la ligne de champ circulaire de centre H_1.)

— Le trièdre étant direct, $\vec{B_1}$ a le sens indiqué sur la figure (on peut dire aussi que $\vec{B_1}$ a le sens de la ligne de champ circulaire de centre H_1, orientée par la règle de la main droite).



— Le module de $\vec{B_1}$ est $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi H_1M}$.

Dans le triangle rectangle H_1OM, $\cos\alpha = \dfrac{OH_1}{H_1M}$, d'où $H_1M = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

Par suite $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1 \cos\alpha}{2\pi a}$.

— Le vecteur $\vec{B_1}$ fait avec Oy l'angle α, ses coordonnées sont :

$$\vec{B_1} \left| \begin{array}{l} -B_1 \sin\alpha = -\dfrac{\mu_0 I_1 \cos\alpha \sin\alpha}{2\pi a} \\ B_1 \cos\alpha = \dfrac{\mu_0 I_1 \cos^2\alpha}{2\pi a} \end{array} \right.$$

b) En raisonnant de la même façon, vous trouverez les coordonnées de $\vec{B_2}$:

$$\vec{B_2} \left| \begin{array}{l} B_2 \sin\alpha = \dfrac{\mu_0 I_2 \cos\alpha \sin\alpha}{2\pi a} \\ B_2 \cos\alpha = \dfrac{\mu_0 I_2 \cos^2\alpha}{2\pi a} \end{array} \right.$$

c) Les coordonnées de $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$ sont :

$$\vec{B} \left| \begin{array}{l} \overline{B_x} = \dfrac{\mu_0 \cos\alpha \sin\alpha}{2\pi a}(I_2 - I_1) \\ \overline{B_y} = \dfrac{\mu_0 \cos^2\alpha}{2\pi a}(I_1 + I_2) \end{array} \right.$$

d) Application numérique :

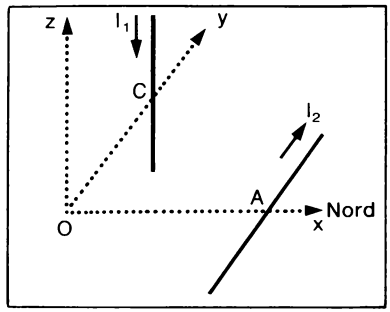
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ uS.I.; $I_1 = 6$ A, $I_2 = 4$ A; $\alpha = 30°$; $a = 5 \cdot 10^{-2}$ m; d'où :

$$\vec{B} \left| \begin{array}{l} \overline{B_x} = -3{,}46 \cdot 10^{-6}\ \text{T} \\ \overline{B_y} = 3 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \end{array} \right.$$

Par suite $B = \sqrt{\overline{B_x}^2 + \overline{B_y}^2} = 3{,}02 \cdot 10^{-5}$ T.

e) Si $I_1 = I_2$, d'après *c*), on constate que $\overline{B_x} = 0$: le vecteur $\vec{B}$ est alors porté par Oy, il est perpendiculaire au plan des deux fils.

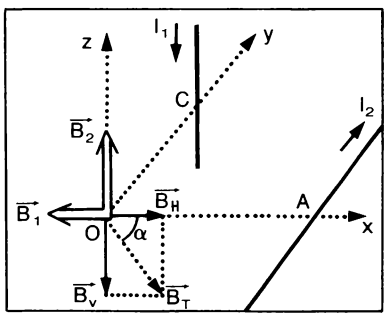
E 120. *L'espace est rapporté à un trièdre trirectangle (Ox, y, z). Ox est horizontal, orienté vers le nord magnétique; Oz est vertical vers le haut (le plan xOz est donc le plan du méridien magnétique).*
Un long fil rectiligne vertical passe par le point C de coordonnées (0; b; 0), il est parcouru par un courant d'intensité I_1, dirigé vers le bas.
Un autre fil, long et rectiligne, horizontal, parallèle à Oy, passe par le point A de coordonnées (a; 0; 0), il est parcouru par un courant d'intensité I_2 ayant le sens Est vers Ouest.



a) *Déterminer les coordonnées du champ magnétique $\vec{B}$ dû aux 2 fils en O.*

b) *Sachant que a = 3 cm et b = 4 cm, quelles valeurs doit-on donner à I_1 et à I_2 pour que le champ magnétique dû aux 2 fils et à la Terre soit nul en O?*
Données : le vecteur champ magnétique terrestre $\vec{B_T}$ a pour module $B_T = 4{,}7 \cdot 10^{-5}$ T, et est incliné vers le bas de $\alpha = 63°$ par rapport à l'horizontale.

S 120. *a)* • Le vecteur $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$, $\vec{B_1}$ dû au fil vertical, $\vec{B_2}$ dû au fil horizontal.
• Le vecteur $\vec{B_1}$ est tel que le trièdre $(\vec{I_1}, \overrightarrow{CO}, \vec{B_1})$ soit trirectangle et direct.
— Le trièdre étant trirectangle, $\vec{B_1}$ est perpendiculaire à $\vec{I_1}$ (donc à Oz) et à $\overrightarrow{CO}$ (donc à Oy), par suite $\vec{B_1}$ est parallèle à Ox.
— Le trièdre étant direct, $\vec{B_1}$ est dirigé vers le Sud.
— Le module de $\vec{B_1}$ est $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi b}$.



• Le vecteur $\vec{B_2}$ est tel que le trièdre $(\vec{I_2}, \overrightarrow{AO}, \vec{B_2})$ soit trirectangle et direct.
— Le trièdre étant trirectangle, $\vec{B_2}$ est perpendiculaire à I_2 (donc à Oy) et à $\overrightarrow{AO}$ (donc à Ox), par suite $\vec{B_2}$ est parallèle à Oz.
— Le trièdre étant direct, $\vec{B_2}$ est dirigé vers le haut.
— Le module de $\vec{B_2}$ est $B_2 = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I_2}{a}$.
• $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$ a pour coordonnées :

$$\vec{B} \left| \begin{array}{l} \overline{B_x} = -B_1 = -\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi b} \\ \overline{B_y} = 0 \\ \overline{B_z} = B_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \end{array} \right.$$

b) • Le champ magnétique terrestre $\vec{B_T}$ a pour coordonnées, en remarquant que sa composante horizontale $\vec{B_H}$ pointe vers le Nord :

$$\vec{B_T} \left| \begin{array}{l} B_H = B_T \cos \alpha \\ 0 \\ -B_V = -B_T \sin \alpha \end{array} \right.$$

• Le champ dû aux 2 fils et à la Terre, $\overrightarrow{B_{total}} = \vec{B} + \vec{B_T}$ doit être nul, donc :

$$\overrightarrow{B_{total}} = \vec{0} \left| \begin{array}{l} -\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi b} + B_T \cos\alpha = 0 \\ 0 \\ \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi a} - B_T \sin\alpha = 0 \end{array} \right.$$

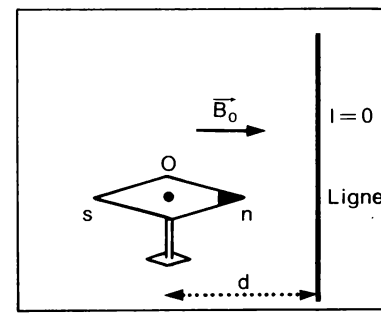
Par suite $I_1 = \dfrac{2\pi b B_T \cos\alpha}{\mu_0} = 4{,}27$ A.

$I_2 = \dfrac{2\pi a B_T \sin\alpha}{\mu_0} = 6{,}28$ A.

E 121. *Une petite aiguille aimantée* sn, *de centre* O, *est libre de tourner sans frottement dans un plan horizontal autour d'un axe vertical.*

On se propose de déterminer la valeur de la composante horizontale B_0 *du champ magnétique terrestre.*

Le centre O *de l'aiguille est placé à une distance* d = 30 cm *d'une ligne verticale, très longue, de telle sorte qu'en l'absence de courant dans la ligne,* $\overrightarrow{sn}$ *et la ligne soient dans un même plan vertical, le pôle nord* n *de l'aiguille étant dirigé vers le fil (voir figure).*



La ligne est constituée de N = 12 *fils de cuivre isolés, collés les uns aux autres, formant un ensemble de section négligeable devant* d.

On envoie dans les N *fils des courants continus d'intensité* I = 3 A, *tous de sens ascendant. L'aiguille tourne de* 50°.

Représenter, vue de dessus, cette expérience, par un schéma où figureront le fil, le sens du courant, les vecteurs champ magnétique et l'aiguille. En déduire B_0.

(D'après bac)

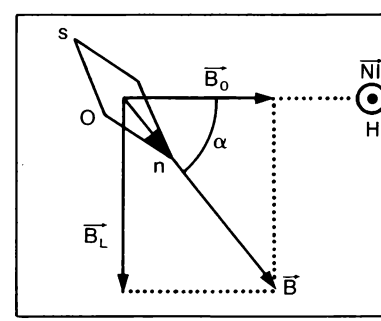
S 121. • Figure :

— la ligne est perpendiculaire à la figure en H, les N courants vont vers le haut, on les représente par $N\vec{I}$;

— l'axe de l'aiguille vertical coupe la figure en O;

— le vecteur $\vec{B_0}$ sort par le pôle n de l'aiguille à l'équilibre lorsque la ligne n'est parcourue par aucun courant : donc $\vec{B_0}$ a la direction et le sens de $\overrightarrow{OH}$:

— le vecteur champ magnétique $\vec{B_L}$ dû à la ligne est tel que $(N\vec{I}, \overrightarrow{HO}, \vec{B_L})$ soit trirectangle ($\vec{B_L} \perp \vec{I}$ et $\vec{B_L} \perp \overrightarrow{HO}$ est donc horizontal et perpendiculaire à $\vec{B_0}$) et direct ($\vec{B_L}$ a donc le sens indiqué);



— lorsque la ligne est parcourue par les courants, l'aiguille s'oriente de façon que $\vec{B} = \vec{B_0} + \vec{B_L}$ sorte par son pôle nord n.

• Module de $\vec{B_0}$.

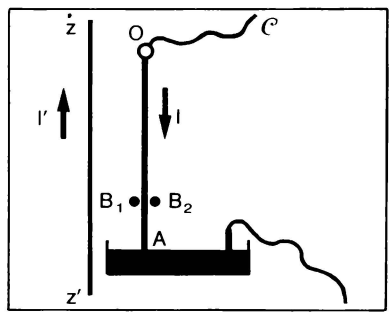
Comme $\vec{B_L} \perp \vec{B_0}$, dans le triangle rectangle d'hypoténuse $\vec{B}$, $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{B_L}{B_0}$.

Les N fils collés les uns aux autres, parcourus par des courants de même intensité I et de même sens, sont équivalents à un conducteur unique parcouru par le courant d'intensité NI, donc :

$$B_L = \frac{\mu_0 NI}{2\pi d}.$$

Par suite $B_0 = \dfrac{B_L}{\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi d\,\text{tg}\,\alpha} = 2{,}01 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \simeq 2 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$.

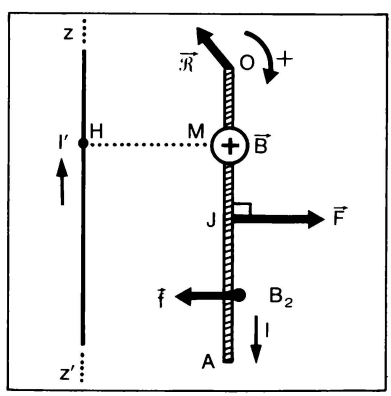
E 122. *Un long fil zz', rectiligne, vertical, rigide, fixé, est parcouru par un courant continu ascendant d'intensité* $I' = 20$ A.
Une tige conductrice OA, *de longueur* $d = 30$ cm, *est mobile sans frottement autour d'un axe horizontal passant par son extrémité supérieure* O. *Elle plonge très faiblement dans une nappe de mercure.*
Cette tige fait partie d'un circuit électrique $\mathcal{C}$ *alimenté par une batterie de f.é.m.* $E = 24$ V *de résistance interne* $r = 0{,}05\ \Omega$. *La résistance du circuit (fil de jonction, tige* OA, *mercure) est* $R = 0{,}75\ \Omega$.
Deux butées B_1 *et* B_2, *situées à la distance* $b = OB_1 = OB_2 = 20$ cm *de* O, *empêchent le fil* OA *de s'écarter de façon sensible de la verticale, le fil reste ainsi pratiquement à la distance* $a = 2$ cm *de* z'z.
Au contact de quelle butée le fil OA *vient-il lorsque le courant descend dans* OA? *Quelle est la force* f *de l'action de cette butée sur* OA?
On néglige l'action de contact du mercure sur la tige. On néglige le champ magnétique créé par le reste du circuit $\mathcal{C}$ *au niveau de* OA *et le champ magnétique terrestre.*



S 122. • Soit M un point quelconque de OA. Le champ magnétique $\vec{B}$, créé en M, par le fil z'z est tel que le trièdre $(\vec{i'}, \overrightarrow{HM}, \vec{B})$ soit trirectangle et direct.
Le trièdre étant trirectangle $\vec{B} \perp z'z$ et $\vec{B} \perp HM$ font que $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de la figure contenant z'z et OA.
Le trièdre étant direct, $\vec{B}$ est dirigé vers l'arrière.

Le module de $\vec{B}$ est $B = \dfrac{\mu_0 I'}{2\pi a}$ ①

Le fil z'z produit en tout point de OA, qui lui est parallèle, le même vecteur $\vec{B}$ que celui déterminé ci-dessus.



• Le fil OA baigné par $\vec{B}$, parcouru par le courant I de O vers A, subit la force électromagnétique ou de Laplace (revoir $\mathcal{M}$ 41) $\vec{F} = I\overrightarrow{OA} \wedge \vec{B}$.
— Direction de $\vec{F}$: $\vec{F} \perp \vec{B}$ est dans le plan de la figure;
$\vec{F} \perp \overrightarrow{OA}$.
— Sens de $\vec{F}$: le trièdre $(\overrightarrow{OA}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct, la force de Laplace est dirigée vers la droite, le fil vient donc au contact de la butée B_2.
— Module de $\vec{F}$: $F = I \cdot OA \cdot B \cdot |\sin(\overrightarrow{OA}, \vec{B})| = IdB$ ②
— Point de localisation : $\vec{F}$ répartie uniformément sur OA peut être localisée au milieu J de OA.

• Étudions l'équilibre de la tige OA. Cette tige est soumise à la réaction $\vec{\mathcal{R}}$ de l'axe; à son poids $\vec{P}$ non indiqué sur la figure; à la force de Laplace $\vec{F}$; à la force $\vec{f}$, due à la butée, que nous supposerons horizontale.
Elle est en équilibre donc $\vec{\mathcal{R}} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$ et, par rapport à l'axe horizontal passant par O, $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{R}}}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{P}}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{F}}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{f}}} = 0$.
Exploitons la deuxième égalité qui a l'intérêt de ne pas faire intervenir $\vec{\mathcal{R}}$ puisque $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{R}}}} = 0$, $\vec{\mathcal{R}}$ s'appliquant sur l'axe.
$\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{P}}} = 0$ car $\vec{P}$ a son support qui passe par O.

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{F}}} = -F \cdot OJ = -F\dfrac{d}{2}$ car $\vec{F} \perp OJ$.

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{f}}} = f \cdot OB_2 = fb$ car $\vec{f} \perp \overrightarrow{OB_2}$.

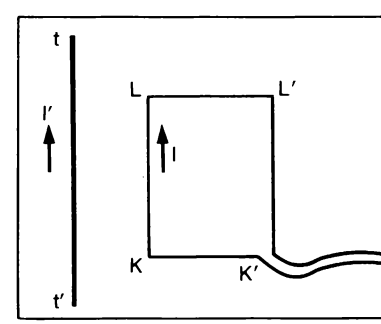
Par suite $$-F\frac{d}{2} + fb = 0$$

D'où $$f = \frac{Fd}{2b}$$

D'après ① et ② $$f = \frac{\mu_0 d^2 II'}{4\pi ab}.$$

• Application numérique : en appliquant la loi de Pouillet (voir $\mathcal{M}$ 42) au circuit sans dérivation $\mathcal{C}$, on en déduit $I = \dfrac{E}{r+R} = \dfrac{24}{0{,}05 + 0{,}75} = 30$ A.
En sachant que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ uSI, il est facile d'en déduire $f = 1{,}35 \cdot 10^{-3}$ N.

E 123. *Un cadre rectangulaire* KLL'K' *a pour côtés* $b = KL = K'L' = 10$ cm *et* $a = LL' = KK' = 4$ cm. *Il est parcouru par un courant continu d'intensité* $I = 6$ A.
Un long fil t't, *situé dans le plan du cadre, parallèle à* KL, *à la distance* $c = 3$ cm de KL, *est parcouru par un courant continu d'intensité* $I' = 15$ A.



a) *On étudie l'action du fil* t't *sur le cadre :*

α) *le champ créé par* t't *est-il uniforme?*

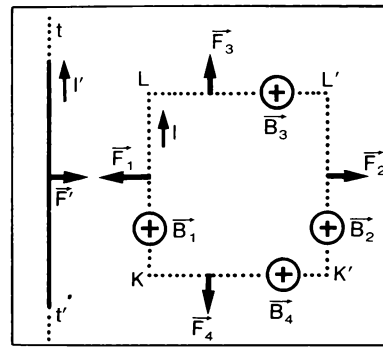
β) *déterminer la direction, le sens et le module des forces agissant sur* KL *et* K'L';

γ) *déterminer la direction et le sens des forces agissant sur* LL′ *et* KK′, *que peut-on dire de leur module?*

δ) *déterminer la force résultant de l'action de* t't *sur le cadre.*

b) *Quelle est la force résultant de l'action du cadre sur* t't?

S 123. *a*) α) Le fil t't crée un champ magnétique dans le plan du cadre :
— qui a partout la même direction, il est perpendiculaire au plan (fil, cadre);
— qui a partout le même sens (les lignes de champ, orientées par la règle de la main droite, entrent d'avant en arrière dans le cadre);
— qui a un module dépendant de la distance au fil.
Le champ magnétique n'est donc pas uniforme.



β) • Tous les points du fil KL sont baignés par le même champ magnétique $\vec{B_1}$, de module $B_1 = \dfrac{\mu_0 I'}{2\pi c}$ ①.

Le fil KL subit la force de Laplace $\vec{F_1} = I\vec{KL} \wedge \vec{B_1}$.
— Direction de $\vec{F_1}$: $\vec{F_1} \perp \vec{B_1}$ donc $\vec{F_1}$ est dans le plan du cadre;
$\vec{F_1} \perp \vec{KL}$, donc $\vec{F_1}$ parallèle à KK′.
— Sens de $\vec{F_1}$: le trièdre $(\vec{KL}, \vec{B_1}, \vec{F_1})$ est direct, donc $\vec{F_1}$ a le sens K′ vers K, le fil KL a tendance à être attiré par le fil t't parcouru par un courant de même sens.
— Module de $\vec{F_1}$: $F_1 = I \cdot KL \cdot B_1 \cdot |\sin(\vec{KL}, \vec{B_1})| = lbB_1$. Compte tenu de ①,

$$F_1 = \frac{\mu_0 bII'}{2\pi c} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

• De même vous montrerez que l'action de t't sur K′L′ est une force $\vec{F_2}$ parallèle à KK′, de sens K vers K′ (le fil a tendance à être repoussé) de module

$$F_2 = \frac{\mu_0 bII'}{2\pi(c+a)} = 2{,}57 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

γ) • Le fil LL′ est baigné par le champ $\vec{B_3}$, perpendiculaire au plan du cadre vers l'arrière, dont le module décroît de L à L′.
Sur chaque portion de LL′ la force de Laplace est :
— perpendiculaire à $\vec{B_3}$ et à $\vec{LL'}$, donc est parallèle à KL;
— de sens tel que le trièdre $(\vec{LL'}, \vec{B_3}, \vec{Force})$ soit direct, donc de sens K vers L.
Sur l'ensemble du fil LL′, la force résultante $\vec{F_3}$ est donc parallèle à KL, de sens K vers L. (Sur la figure nous avons localisé cette force plus près de L que de L′ puisque $\vec{B_3}$ est plus intense vers L.)

• De même KK′ est soumis à la force $\vec{F_4}$, parallèle à KL, de sens L vers K.

• Le champ varie de la même façon suivant LL′ que suivant KK′ : les deux forces $\vec{F_3}$ et $\vec{F_4}$ ont le même module. Ces deux forces sont donc opposées.

δ) La force de l'action de t't sur le cadre est :

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}.$$

D'après γ) $\vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{0}$.
Les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ ont même direction, des sens opposés : $\vec{F}$ a la direction commune; a le sens de la plus grande, $\vec{F_1}$; a pour module $F = F_1 - F_2 = 3{,}43 \cdot 10^{-5}$ N.

b) • La force $\vec{F}$ est la force de l'action de t't sur le cadre.
La force $\vec{F'}$ est la force de l'action du cadre sur t't.
La force $\vec{F'}$ est la force réciproque de $\vec{F}$: $\vec{F'} = -\vec{F}$. Par suite $\vec{F'}$ est perpendiculaire à t't, dirigée vers le cadre, de module $3{,}43 \cdot 10^{-5}$ N.
(Rappelons que $\vec{F}$ est parfois appelé l'action et $\vec{F'}$ la réaction, on dit alors que « d'après le principe de l'action et de la réaction $\vec{F'} = -\vec{F}$ ».)

E 124. *Un long solénoïde est orienté de façon que son axe soit horizontal de direction Est-Ouest.*
Une aiguille aimantée mobile autour d'un axe vertical est placée à l'intérieur du solénoïde.
Le solénoïde est constitué par 2 couches de spires jointives, le fil conducteur a un diamètre extérieur, isolant compris, égal à d = 1 mm.

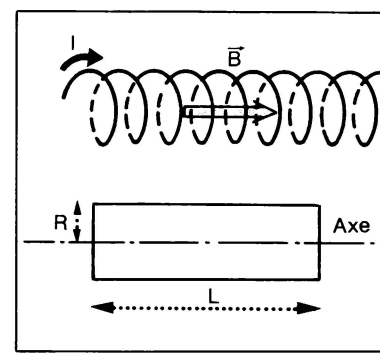
a) *Lorsque le solénoïde n'est pas parcouru par un courant, l'aiguille prend une position d'équilibre stable, laquelle?*

b) *Lorsqu'on fait passer un courant continu d'intensité* 12 mA *dans le solénoïde, l'aiguille s'oriente en faisant un angle de* 34° *avec l'axe du solénoïde.*
En déduire la valeur de la composante horizontale B_H *du champ magnétique terrestre.*

50 Champ magnétique créé à l'intérieur d'un solénoïde très long.

• Soit un solénoïde de rayon R très inférieur à sa longueur L (mesurée suivant son axe). Ce solénoïde est constitué par N spires : son nombre de spires par mètre est :

$$n = \frac{N}{L}$$



• A l'intérieur d'un tel solénoïde, le champ magnétique est uniforme, caractérisé par un vecteur champ $\vec{B}$:

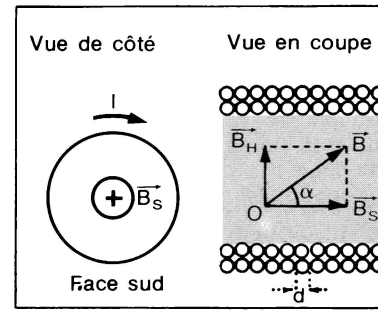
— parallèle à l'axe du solénoïde;
— de sens tel qu'il sorte par la face nord de la bobine (on peut utiliser la règle de la main droite : les doigts autres que le pouce étant orientés dans le sens du courant, le pouce indique le sens de $\vec{B}$);

— de module $B = \mu_0 nI$.

(Il faut remarquer que B est indépendant de R et L, à condition que $R \ll L$.)

S 124. *a)* • L'aiguille de pôles sud s, nord n, mobile autour d'un axe vertical n'est sensible qu'à la composante horizontale $\vec{B}_H$ du champ magnétique terrestre.

• Lorsqu'elle s'équilibre le vecteur $\vec{B}_H$ sort par son pôle nord n, parallèlement à la direction sn.



b) • Chaque fil de diamètre extérieur d, « occupe une place » suivant l'axe du solénoïde égale à d. Dans une longueur de 1 m de solénoïde on peut donc « loger » $\frac{1}{d}$ spires, d étant exprimé en m. Comme il y a deux couches de spires, le nombre de spires par mètre est :

$$n = \frac{2}{d} = \frac{2}{10^{-3}} = 2\,000 \text{ spires/m}.$$

• A l'intérieur du solénoïde très long, le champ magnétique est uniforme, le vecteur champ $\vec{B}_S$ est :

— parallèle à l'axe du solénoïde donc de direction Est-Ouest;

— sort par la face nord de la bobine (ou entre par la face sud, c'est ce qui est représenté sur la vue de côté);

— a pour module $B_S = \mu_0 nI = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 2\,000 \times 12 \cdot 10^{-3} = 3{,}02 \cdot 10^{-5}$ T.

• Le solénoïde a été orienté de façon que $\vec{B}_S \perp \vec{B}_H$. L'aiguille placée en O (voir vue en coupe) s'oriente dans la direction de $\vec{B} = \vec{B}_S + \vec{B}_H$, de façon que $\vec{B}$ sorte par son pôle nord n.

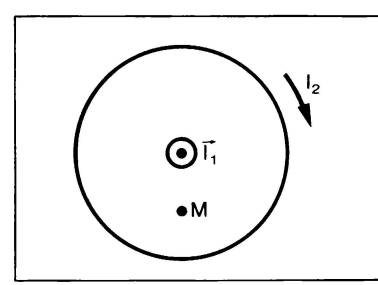
Dans le triangle rectangle d'hypoténuse $\vec{B}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_H}{B_S}$.

D'où $B_H = B_S \operatorname{tg} \alpha = 3{,}02 \cdot 10^{-5} \times \operatorname{tg} 34^\circ = 2{,}04 \cdot 10^{-5}$ T.

E 125. *On enroule un fil isolé de longueur* $\ell_F = 150$ m *de façon à obtenir un solénoïde de rayon* R = 4 cm, *de longueur* L = 0,60 m.

a) *Combien ce solénoïde comporte-t-il de spires par m?*

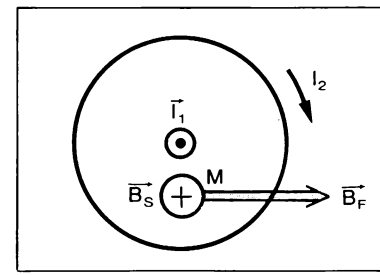
b) *Suivant l'axe de ce solénoïde passe un long fil rectiligne parcouru par un courant continu d'intensité* $I_1 = 6$ A.



Le solénoïde est parcouru par un courant continu d'intensité I_2 *(voir les sens des courants sur la figure).*

Déterminer I_2 *sachant qu'en un point* M *situé à la distance* $d = \frac{R}{2}$ *du fil, le champ* $\overrightarrow{B_S}$ *créé par le solénoïde a même valeur que le champ* $\overrightarrow{B_F}$ *créé par le fil. Faire une figure où seront indiqués le sens des courants, les vecteurs* $\overrightarrow{B_S}$ *et* $\overrightarrow{B_F}$.

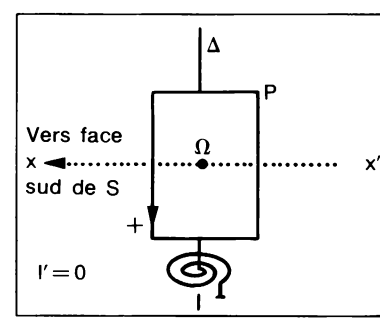
S 125. *a*) On peut assimiler une spire à un cercle (il faut pour cela que le nombre de spires par mètre, n, ne soit pas trop faible).



La circonférence d'une spire est $2\pi R$.
Le fil bobiné permet donc d'obtenir $N = \frac{\ell_F}{2\pi R}$ spires.
La longueur du solénoïde (ou bobine longue) obtenu est L, par suite le nombre de spires par mètre est $n = \frac{N}{L} = \frac{\ell_F}{2\pi RL} = 995$ spires/m.

b) Réponse : $I_2 = \frac{I_1}{\pi nR} = 4{,}8 \cdot 10^{-2}$ A = 48 mA.
(Ne pas oublier de commenter la figure : présenter $\overrightarrow{B_S}$ et $\overrightarrow{B_F}$.)

E 126. *Un solénoïde* S *(non représenté sur la figure) a un axe* x'x *horizontal orienté de sa face nord vers sa face sud. Ce solénoide est assez long pour qu'on puisse considérer sa longueur comme infinie, il comporte* n *spires par mètre. Le courant qui le parcourt a pour intensité* I. *On place au centre du solénoïde une petite bobine rectangulaire plate,* P, *formée de* N *spires, chacune d'aire* S.
Cette bobine peut tourner autour d'un axe vertical Δ, *passant par le centre* Ω *de* P *qui est situé sur* x'x. *Un ressort spiral de constante de torsion* C *maintient la bobine* P *de telle sorte que son plan contienne* x'x *en l'absence de tout courant (voir figure représentée lorsque* $I' = 0$*).*

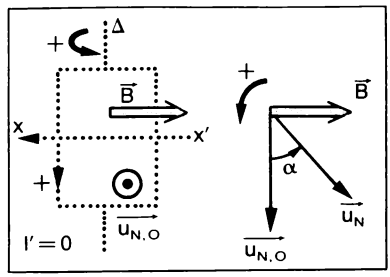


a) *On fait passer dans la bobine* P *un courant continu d'intensité* I' *suivant le sens positif indiqué. Qu'observe-t-on?*

b) *A l'équilibre la bobine* P *a tourné de* α *radians.*
Montrer que α *dépend des intensités des courants par le produit* II'.

(D'après bac)

S 126. *a*) • Le vecteur unitaire normal est perpendiculaire au plan de P, son sens est donné par la règle de la main droite : les doigts tournant dans le sens positif, le pouce indique le sens de $\overrightarrow{u_N}$.



• Le courant étant lancé dans le sens positif, $\overrightarrow{u_N}$ sort par la face nord du cadre P.

• Le cadre est baigné par le champ magnétique uniforme $\vec{B}$ dû au solénoïde S : $\vec{B}$ est parallèle à l'axe x'x de S, il va de la face sud vers la face nord, il a pour module $B = \mu_0 nI$.

• Le cadre tourne autour de Δ, dans le sens direct, de façon que $\vec{B}$ sorte par sa face nord (s'il n'y avait pas de ressort spiral le cadre tournerait de 90° de façon que $\vec{B}$ sorte perpendiculairement à sa face nord).

b) • Le cadre est en équilibre sous l'action de son poids $\vec{p}$, de la réaction $\vec{R}$ de l'axe Δ, du couple de torsion dû au ressort spiral de moment $\overline{\Gamma_t}$, du couple électromagnétique $\overline{\Gamma_\Delta}$. En mesurant les angles et les moments positivement dans le sens direct, autour de Δ :

$$\mathcal{M}_{\vec{p}} + \mathcal{M}_{\vec{R}} + \overline{\Gamma_t} + \overline{\Gamma_\Delta} = 0.$$

Comme $\vec{p}$ est vertical, donc parallèle à Δ, $\overline{\mathcal{M}_{\vec{p}}} = 0$.

Comme $\vec{R}$ s'applique sur Δ : $\mathcal{M}_{\vec{R}} = 0$.

Le ressort spiral n'est pas tordu au départ, à l'équilibre il est tordu de α rad : le moment du couple de torsion $\overline{\Gamma_t} = -C\alpha$.

Le moment du couple électromagnétique $\overline{\Gamma_\Delta} = -NI'SB \sin(\vec{B}, \overrightarrow{u_N})$.

(Dans ce problème il n'est pas explicitement demandé d'évaluer $\overline{\Gamma_\Delta}$; avant d'utiliser la formule, vérifier si les conditions sont satisfaites : champ magnétique uniforme; courant dans le sens + ; angles et moments mesurés suivant le même sens positif autour de Δ.)

Le cadre tourne de $(\overrightarrow{u_{N,O}}, \overrightarrow{u_N}) = \alpha$.

$$(\vec{B}, \overrightarrow{u_N}) = (\vec{B}, \overrightarrow{u_{N,O}}) + (\overrightarrow{u_{N,O}}, \overrightarrow{u_N})$$
$$= -\frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Comme $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, $\overline{\Gamma_\Delta} = NI'SB \cos\alpha$.

La condition d'équilibre est donc $NI'SB \cos\alpha - C\alpha = 0$.

Comme $B = \mu_0 nI$, cette condition s'écrit finalement :

$$\mu_0 NSnII' \cos\alpha - C\alpha = 0.$$

Elle fait intervenir le produit II'.

POURQUOI ?

• *Pourquoi dans la formule donnant le champ magnétique créé par un fil rectiligne très long, n'écrit-on pas* $B = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I}{d}$ *à la place de* $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$?

La « constante magnétique » ou « perméabilité magnétique du vide », μ_0, est un nombre ayant une dimension (revoir ce que signifie « dimension » dans le dernier Pourquoi? du chapitre 2) : la valeur de μ_0 dépend donc des unités choisies. Remplacer $\frac{\mu_0}{2\pi}$ par $2 \cdot 10^{-7}$ c'est donc faire une application numérique partielle, valable uniquement dans le système d'unités internationales (S.I.).

• *Lorsqu'on place une aiguille aimantée dans un champ magnétique non uniforme, est-ce correct de dire que l'aiguille s'oriente suivant le vecteur champ magnétique en son centre* O?

Dans tous les problèmes où le champ magnétique n'est pas uniforme, vous supposerez toujours que l'aiguille a des dimensions suffisamment faibles pour négliger les variations de $\vec{B}$ au niveau de l'aiguille.

• *Dans l'exercice* E 119 *on trouve que* $B = 3{,}02 \cdot 10^{-5}$ T, *pourquoi ne tient-on pas compte du champ magnétique terrestre* B_t *qui n'est pas du tout négligeable?*

• Il faut lire correctement l'énoncé, on demande le champ magnétique dû aux 2 fils F_1 et F_2, et non pas le champ magnétique dû à l'ensemble (2 fils, Terre).

• Dans le même ordre d'idée, dans l'énoncé de E 123, on demande la force électromagnétique agissant sur KL due au fil t't, on ne demande pas la force électromagnétique totale agissant sur KL (en plus du champ magnétique dû à t't, il faudrait étudier le rôle des champs dus aux fils LL', L'K', KK', difficiles à évaluer car les fils sont courts, et à la Terre).

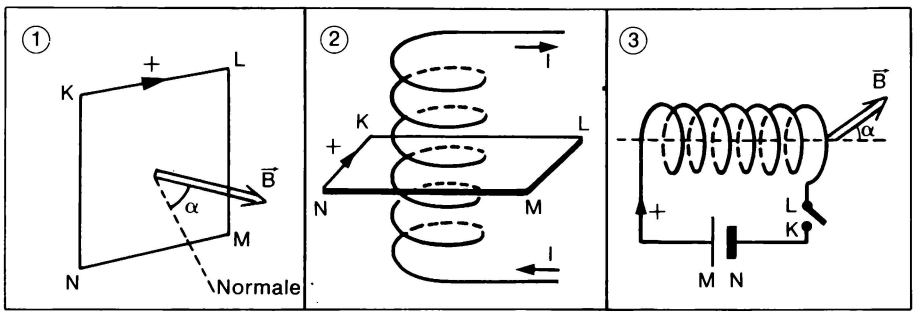
• *Dans le chapitre précédent j'avais bien compris comment étudier l'équilibre d'un cadre, parcouru par un courant, placé dans un champ magnétique. Dans l'exercice* E 126 *(à cause de nouvelles connaissances acquises dans le chapitre) je me suis posé la question : pour évaluer le couple électromagnétique* $\overline{\Gamma_\Delta}$ *faut-il tenir compte de l'interaction entre les fils opposés du cadre, parcourus par des courants de sens contraire?*

• Considérons un cadre rigide KLMN parcouru par un courant.
Le côté KL est baigné par le champ magnétique dû au fil opposé MN, donc est soumis à la force de Laplace $\vec{F}_{MN/KL}$ (force de l'action de MN sur KL). Cette force est compensée par la force réciproque $\vec{F}_{KL/MN}$. Il en est de même pour toutes les forces électromagnétiques intérieures au cadre (c'est-à-dire résultant d'une partie du cadre sur une autre partie du cadre).

• Pour l'équilibre du cadre, seules jouent donc un rôle les forces électromagnétiques dues au champ magnétique extérieur, c'est-à-dire créé par une source autre que le cadre.

10 L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

E 127. *Un circuit* KLMN *(cadre dans les montages* ① *et* ②*, circuit avec solénoïde dans le montage* ③*) est baigné par un champ magnétique, autre que le champ magnétique terrestre que l'on négligera.*



a) *Montage* ① *: le champ magnétique est uniforme et baigne entièrement le cadre plan* KLMN*, de surface* $S = 60\ cm^2$*. Quel est le flux magnétique à travers le circuit* KLMN? $B = 10^{-2}\ T$; $\alpha = 25°$.

b) *Montage* ② *: le champ magnétique est dû à un solénoïde comportant* $n = 4 \cdot 10^3$ *spires/m, de rayon* $R = 6$ cm*, parcouru par un courant continu d'intensité* $I = 8$ A*. Quel est le flux magnétique à travers le circuit plan* KLMN? (*On admettra que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est négligeable; le plan* KLMN *est perpendiculaire à l'axe du solénoïde; le solénoïde passe à l'intérieur de* KLMN.)

c) *Montage* ③ *: le solénoïde a pour rayon* $R = 6$ cm*, pour longueur* $L = 0{,}8$ m *et comprend* 1600 *spires. Le champ magnétique (dû à des bobines de Helmholtz, voir* E 56*, non représentées) qui baigne le solénoïde est uniforme, son module* $B = 10^{-2}\ T$*, il est incliné de* $\alpha = 25°$ *par rapport à l'axe du solénoïde.*

α) *L'interrupteur est levé. Quel est le flux magnétique à travers le circuit* KLMN?

β) *L'interrupteur est abaissé. Quel est le flux propre à travers le circuit? Quel est le flux total? Le générateur* MN *a pour f.é.m.* $E = 6$ V*, la résistance totale du circuit est* $r = 1{,}2\ \Omega$.

51 Flux magnétique à travers un circuit.

• Soit un circuit plan fermé ou presque fermé, muni d'un sens positif (flèche portée par le fil, éventuellement accompagnée de +).
Soit $\overrightarrow{u_N}$ (ou $\vec{n}$) le vecteur unitaire normal (revoir ℳ 46).

Ce circuit, baigné totalement par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, est traversé par le flux magnétique :

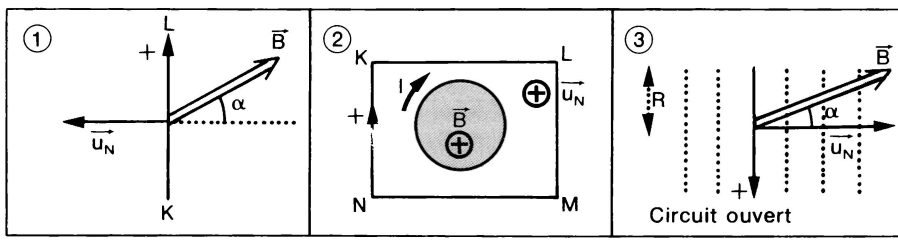
$$\Phi = S\,\vec{u_N}\cdot\vec{B}.$$

Φ s'exprime en weber (Wb) si S est en m^2 et B en T.
Remarque : on pose parfois $\vec{S} = S\,\vec{u_N}$: $\vec{S}$ est le vecteur surface.

52 **Flux magnétique propre.**

- Un circuit parcouru par un courant est baigné par le champ magnétique qu'il crée, le circuit s'envoie un flux à travers lui-même : c'est le flux magnétique propre que nous noterons Φ_0.
- Un circuit parcouru par un courant et baigné par un champ magnétique dû à une autre source que le circuit, est donc traversé par le flux total $\Phi_{total} = \Phi + \Phi_0$.

S 127.



a) $\Phi = S\,\vec{u_N}\cdot\vec{B}$ (voir figure ①).
Le vecteur $\vec{u_N}$, sur la vue de dessus, conformément à la règle de la main droite appliquée à partir du sens +, est dirigé vers la gauche.
Le produit scalaire :

$$\vec{u_N}\cdot\vec{B} = \|\vec{u_N}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot\cos(\vec{u_N}, \vec{B}) = B\cos(180° - \alpha) = -B\cos\alpha.$$

Par suite $\Phi = -SB\cos\alpha = -5{,}44\cdot10^{-5}$ Wb.

b) • Le solénoïde crée un champ magnétique $\vec{B}$, parallèle à son axe, donc perpendiculaire au plan KLMN, dirigé vers le bas, de module :
$B = \mu_0 nI = 4{,}02\cdot10^{-2}$ T.
• Seule l'intersection du circuit KLMN avec le solénoïde est baignée par le champ : cette intersection est un cercle de rayon R, de surface $S = \pi R^2$.
Le flux à travers le circuit KLMN se confond avec le flux à travers cette section : $\Phi = S\,\vec{u_N}\cdot\vec{B}$ (voir figure ②).
Le vecteur unitaire normal au circuit est parallèle à $\vec{B}$, de même sens : $(\vec{u_N}, \vec{B}) = 0$ et $\cos(\vec{u_N}, \vec{B}) = 1$. Par suite $\Phi = SB = \pi R^2 B = 4{,}55\cdot10^{-4}$ Wb.

c) *α*) Le champ magnétique qui baigne le solénoïde est dû aux bobines de Helmholtz, extérieures au circuit (voir figure ③ représentant une vue de dessus).

On peut admettre que chaque spire du solénoïde est un cercle de surface πR^2, de vecteur normal $\overrightarrow{u_N}$: le flux à travers une spire est $\pi R^2 \overrightarrow{u_N} \cdot \overrightarrow{B}$.
Le flux à travers le solénoïde, donc à travers le circuit, est $\Phi = N\pi R^2 \overrightarrow{u_N} \cdot \overrightarrow{B}$.

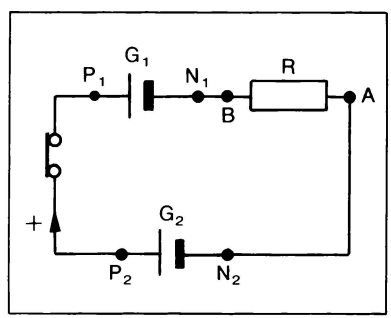
Comme $\overrightarrow{u_N} \cdot \overrightarrow{B} = B \cos \alpha$, $\Phi = N\pi R^2 B \cos \alpha = 0{,}164$ Wb.

β) • Lorsque le circuit est fermé, il est parcouru par le courant d'intensité donnée par la loi de Pouillet (revoir ℳ 42) : $I = \frac{E}{r} = 5$ A.

Le circuit en plus du flux précédent dû aux bobines de Helmholtz, s'envoie à travers lui-même son flux propre Φ_0, ce flux est pratiquement localisé dans le solénoïde.
Soit $\overrightarrow{B_0}$ le champ magnétique créé par le courant traversant le solénoïde, à l'intérieur de ce dernier : $\overrightarrow{B_0}$ est parallèle à l'axe du solénoïde; le courant ayant le sens +, $\overrightarrow{B_0}$ a le sens de $\overrightarrow{u_N}$ (sur la figure ③ $\overrightarrow{B_0}$ n'est pas représenté); son module $B_0 = \mu_0 \frac{NI}{L} = 1{,}26 \cdot 10^{-2}$ T.

Le flux propre $\Phi_0 = NS \overrightarrow{u_N} \cdot \overrightarrow{B_0} = NSB_0 = N\pi R^2 B_0 = 0{,}228$ Wb.
• Le flux total $\Phi_{total} = \Phi + \Phi_0 = 0{,}164 + 0{,}228 = 0{,}392$ Wb.

E 128. *(Cet exercice a pour but de vous rappeler comment utiliser la loi d'Ohm et la loi de Pouillet algébrisées.)*
Soit le circuit électrique schématisé, il comprend :
— un générateur G_1 *de force électromotrice (f.é.m.)* $E_1 = 24$ V, *de résistance interne* $r_1 = 1\ \Omega$;
— un générateur G_2 *de force électromotrice* $E_2 = 12$ V, *de résistance interne* $r_2 = 0{,}5\ \Omega$;
— un résistor R *de résistance* $R = 3{,}5\ \Omega$.
Le circuit est muni d'un sens positif, suivant lequel on mesure l'intensité algébrique du courant i.



a) *Évaluer* i, *en déduire le sens du courant.*

b) *Évaluer* $U_{P_1N_1}$, $U_{P_2N_2}$ *et* U_{AB}.

ℳ 53 **Loi d'Ohm et de Pouillet algébrisées.**

• Intensité algébrique i : si le courant d'intensité I chemine dans le sens positif choisi, alors $i = +I$; s'il chemine en sens contraire $i = -I$. (Rappelons que nous indiquons le sens du courant par une flèche placée à côté du circuit et accompagnée de I.)
• Force électromotrice algébrique e : si un générateur, de pôle négatif N, de pôle positif P, de f.é.m. E, a tendance à envoyer un courant dans le sens positif choisi, c'est-à-dire si $\overrightarrow{NP}$ a le sens +, $e = +E$; s'il a tendance à envoyer un courant dans le sens négatif, c'est-à-dire si $\overrightarrow{NP}$ a le sens −, $e = -E$.

• Loi d'Ohm algébrique pour un dipôle de f.é.m. algébrique e, de résistance r : si le sens + entre par la borne A et sort par la borne B, alors la tension algébrique u_{AB} est telle que :

$$u_{AB} = V_A - V_B = ri - e.$$

• Loi de Pouillet algébrique : pour un circuit ne comportant aucune dérivation, muni d'un sens + :

$$i = \frac{\Sigma e}{\Sigma \text{ résistances}}.$$

(Σ signifie « somme des »).

S 128. *a)* • Le générateur G_1 a tendance à envoyer un courant dans le sens négatif : $e_1 = -E_1$. Le générateur G_2 a tendance à envoyer un courant dans le sens positif : $e_2 = +E_2$.

• Le circuit ne comportant pas de dérivation, d'après la loi de Pouillet :

$$i = \frac{e_1 + e_2}{r_1 + r_2 + R} = \frac{-E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R} = -2{,}4 \text{ A}.$$

Comme i est négatif, le courant chemine dans le sens négatif.

b) Le sens positif conditionne l'ordre des bornes à utiliser pour appliquer la loi d'Ohm :

— pour G_1, le sens + entre par P_1, sort par N_1, donc :

$$u_{P_1N_1} = r_1 i - e_1 = r_1 i + E_1 = 1 \times (-2{,}4) + 24 = 21{,}6 \text{ V},$$

— pour G_2, le sens + entre par N_2, sort par P_2, donc :

$$u_{N_2P_2} = r_2 i - e_2 = r_2 i - E_2 = 0{,}5 \times (-2{,}4) - 12 = -13{,}2 \text{ V},$$

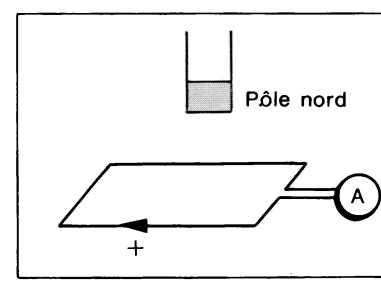
par suite

$$u_{P_2N_2} = 13{,}2 \text{ V},$$

— pour le résistor R, le sens + entre par B, sort par A, donc, en remarquant que $e = 0$, $u_{BA} = Ri = -8{,}4$ V, par suite $u_{AB} = -u_{BA} = 8{,}4$ V.

E 129. *Un cadre plat, fixe, est constitué par* $N = 50$ *spires de surface chacune* $S = 100$ cm^2. *Le cadre et un ampèremètre constituent un circuit de résistance totale* $R = 6\ \Omega$.

Un aimant est placé près du cadre de telle sorte que le champ magnétique soit perpendiculaire au plan du cadre, pratiquement uniforme au niveau du cadre, de module $B = 2 \cdot 10^{-2}$ T.



a) *Quel est le flux magnétique* Φ_1 *à travers le circuit? Qu'indique l'ampèremètre?*

b) *Très rapidement en* $\delta t = 0{,}2$ s, *on éloigne l'aimant : le champ magnétique créé au niveau du cadre par l'aimant devient pratiquement nul. Le cadre est-il parcouru par un courant? Si oui, préciser son sens, son intensité moyenne, sa durée d'existence.*

54 Force électromotrice d'induction.

① Induction, auto-induction.

• Dans le cas général un circuit est traversé par le flux magnétique total :

$$\Phi_{total} = \Phi + \Phi_0.$$

Φ : flux magnétique « extérieur » dû à une source extérieure au circuit appelée « inducteur »;
Φ_0 : flux magnétique propre dû au circuit.

• Lorsque le flux total à travers un circuit varie, il apparaît dans ce circuit une force électromotrice induite (donnant naissance à un courant induit si le circuit est fermé).

• Deux possibilités se présentent dans les problèmes d'examen, niveau baccalauréat :

— si le flux extérieur Φ varie, on suppose négligeables les éventuelles variations du flux propre, on dit qu'on étudie le phénomène d'induction;

— si le flux propre Φ_0 est le seul à varier, on en tient compte : on dit qu'on étudie le phénomène d'auto-induction (voir chapitre suivant).

② F.é.m. d'induction instantanée.

Soit un circuit (encore appelé « induit ») où le flux « extérieur » Φ varie en fonction du temps suivant la loi $\Phi = f(t)$. A chaque instant la f.é.m. induite dans le circuit est :

$$\mathbf{e = -\frac{d\Phi}{dt} = -f'(t).}$$

(e et Φ étant mesurés algébriquement à partir du même sens positif.)

③ F.é.m. d'induction moyenne.

Il est souvent difficile de déterminer la loi de variation $\Phi = f(t)$, on se contente alors d'évaluer la f.é.m. d'induction moyenne entre deux instants t_1 et t_2, c'est-à-dire pendant la durée $\delta t = t_2 - t_1$. Appelons $\delta\Phi$ la variation du flux magnétique pendant cette durée. Alors la f.é.m. induite moyenne est :

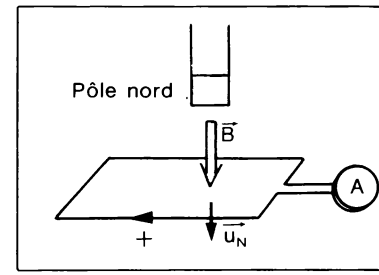
$$\mathbf{e_{moyen} = \frac{-\delta\Phi}{\delta t}.}$$

55 Sens du courant induit.

Dans un circuit fermé le phénomène d'induction donne naissance à un courant induit.
Le sens de ce courant peut être déterminé :
— par un calcul algébrisé à partir d'un sens +;

— parfois à partir du vecteur champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}}$ (voir ℳ 58);
— par l'application de la loi de Lenz suivante : le courant induit a un sens tel que par ses effets il tend à s'opposer à la cause qui le produit.

S 129. *a*) • Le vecteur unitaire normal au circuit, avec le sens + indiqué, est dirigé vers le bas.



• L'aimant crée un champ magnétique $\vec{B}$ qui sort par son pôle nord : $\vec{B}$ est dirigé vers le bas.

• Le cadre étant partout baigné par le même champ magnétique $\vec{B}$, est traversé par le flux $\Phi_1 = NS\,\vec{u_N}\cdot\vec{B} = NSB$, puisque $\vec{u_N}$ et $\vec{B}$ sont parallèles (ils sont tous les deux perpendiculaires au plan du cadre) et de même sens.
Numériquement : $\Phi_1 = 50 \times 100 \cdot 10^{-4} \times 2 \cdot 10^{-2} = 10^{-2}$ Wb.

• Tant que l'aimant reste immobile par rapport au cadre, le flux Φ_1 reste constant : il n'apparaît pas de phénomène d'induction, aucun courant ne traverse le cadre et l'ampèremètre.

Remarque : on peut écrire $\Phi = \Phi_1 = C^{te}$, donc $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = 0$ puisque la dérivée d'une constante est nulle.

b) • Présentation qualitative de l'expérience : lorsqu'on éloigne l'aimant le flux à travers le circuit varie; il apparaît donc pendant ce mouvement une f.é.m. induite dans le cadre, donc un courant induit puisque ce dernier est fermé; on peut déterminer sans calcul le sens de ce courant en appliquant la loi de Lenz : le courant induit essaie de s'opposer au mouvement de l'aimant, il tend à retenir l'aimant, la face supérieure du cadre est donc une face sud, le courant circule donc dans le sens positif.

• Le flux final à travers le circuit est nul. Pendant la durée δt, le flux varie donc de $\delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 0 - 10^{-2} = -10^{-2}$ Wb.

La f.é.m. d'induction moyenne $e = \dfrac{-\delta\Phi}{\delta t} = \dfrac{10^{-2}}{0{,}2} = 5 \cdot 10^{-2}$ V.

Appliquons la loi de Pouillet au circuit sans dérivation (cadre-ampèremètre) :

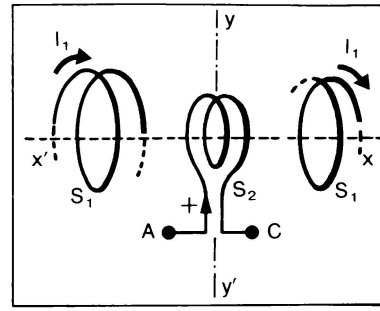
$$i = \frac{e}{R} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{6} = 8{,}33 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 8{,}33\ \text{mA}.$$

Comme i est positif, le courant circule dans le sens positif, c'est ce que nous avions prévu.

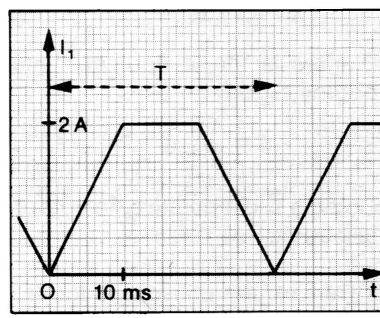
• Le courant n'existe que pendant la durée de variation du flux, donc pendant δt secondes.

• Remarque : le champ magnétique terrestre produit un flux constant à travers le cadre fixe, il n'intervient pas.

E 130. *Un solénoïde* S_1, *très long, fixe, possède* $n_1 = 10^3$ *spires par* m, *il est parcouru par un courant de sens constant indiqué sur la figure, mais d'intensité* I_1 *qui pourra éventuellement varier. Son axe* x'x *est horizontal.*
Une bobine plate S_2 *est placée à l'intérieur de* S_1, *elle comporte* $N_2 = 200$ *spires d'aire chacune égale à* $s_2 = 20\ cm^2$. *La résistance est* $r = 0{,}5\ \Omega$.



a) *L'intensité* I_1 *est maintenue constante et égale à* 8 A.
La bobine S_2 *est reliée par ses bornes* A *et* C *à un résistor de résistance* $R = 10\ \Omega$.
La bobine S_2 *a son plan initialement perpendiculaire à* x'x *(position indiquée sur la figure). On la tourne de* 90°, *autour de l'axe vertical* y'y, *en* $\delta t = 0{,}1$ s.
Quelle est l'intensité moyenne du courant qui la traverse? Quel est son sens?
b) La bobine S_2 *reste fixe dans la position indiquée sur la figure. Ses bornes sont reliées à la masse* M *et à la voie de déviation verticale* Y *d'un oscillographe utilisé avec son balayage :* A *est relié à* Y, C *à* M.
On fait varier périodiquement I_1 *en fonction du temps comme l'indique le graphique ci-contre.*
Représenter en vraie grandeur la courbe observée sur l'écran de l'oscillographe.
Données :
— *largeur de l'écran* 9 cm;
— *période de balayage, c'est-à-dire durée nécessaire au spot pour décrire horizontalement tout l'écran,* 30 ms;
— *sensibilité de la voie verticale* Y : 0,1 V · cm^{-1}.



56 **Une propriété des fonctions linéaires ou affines.**

• Soit la fonction $y = ax + b$, a et b étant des constantes.
La dérivée de y par rapport à x, $\frac{dy}{dx} = a$, est constante.

• Lorsque x varie de $\Delta x = x_2 - x_1$, y varie de $\Delta y = y_2 - y_1$.
Comme $y_2 = ax_2 + b$ et $y_1 = ax_1 + b$, $\Delta y = a(x_2 - x_1) = a\Delta x$.
Par suite le taux de variation $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \frac{dy}{dx}$.

• En résumé pour une fonction linéaire ou affine :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

S 130. *a)* • Présentation qualitative de l'expérience : le solénoïde S_1 crée un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_1}$; en tournant la bobine S_2 on fait varier le flux magnétique dû à S_1 qui la traverse; S_2 est le siège d'une f.é.m. d'induction; comme S_2 fait partie d'un circuit fermé, un courant induit prend naissance.

• A l'intérieur de S_1, très long, le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ est uniforme : il est parallèle à x'x, de sens x' vers x, de module $B_1 = \mu_0 n_1 I_1$.

• Soit $\overrightarrow{u_N}$ le vecteur unitaire normal à S_2. Dans la position initiale ce vecteur $\overrightarrow{u_{N,i}}$ est parallèle à x'x, de sens x' vers x (appliquer la règle de la main droite en considérant le sens + dans S_2).
Le flux initial qui traverse S_2 est $\Phi_i = N_2 s_2 \overrightarrow{u_{N,i}} \cdot \overrightarrow{B_1}$. Comme $\overrightarrow{u_{N,i}}$ et $\overrightarrow{B_1}$ sont parallèles et de même sens : $\overrightarrow{u_{N,i}} \cdot \overrightarrow{B_1} = B_1$, par suite $\Phi_i = N_2 s_2 B_1 = \mu_0 N_2 s_2 n_1 I_1 = 4{,}02 \cdot 10^{-3}$ Wb.

• Dans la position finale, le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_{N,f}}$ est perpendiculaire à x'x, donc à $\overrightarrow{B_1}$: $\overrightarrow{u_{N,f}} \cdot \overrightarrow{B_1} = 0$, par suite le flux à travers la bobine S_2, $\Phi_f = N_2 s_2 \overrightarrow{u_{N,f}} \cdot \overrightarrow{B_1} = 0$.

• Pendant l'intervalle de temps δt, le flux à travers S_2 varie de :

$$\delta\Phi = \Phi_f - \Phi_i = -\Phi_i.$$

La f.é.m. d'induction moyenne, mesurée suivant le sens + indiqué, est :

$$e = \frac{-\delta\Phi}{\delta t} = \frac{\Phi_i}{\delta t} = 4{,}02 \cdot 10^{-2} \text{ V}.$$

D'après la loi de Pouillet, l'intensité algébrique moyenne du courant dans la bobine S_2 est :

$$i_2 = \frac{e}{R + r} = \frac{4{,}02 \cdot 10^{-2}}{10 + 0{,}5} = 3{,}83 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 3{,}83 \text{ mA}.$$

Comme i_2 est positive, le courant circule dans le sens positif : de A vers C dans la bobine.

• Remarque : utilisons la loi de Lenz pour vérifier le sens du courant déterminé précédemment.
Rappelons d'abord qu'une bobine, libre de tourner dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_1}$, a tendance à revenir vers la position où $\overrightarrow{B_1}$ sort perpendiculairement par sa face nord.
Le courant induit dans S_2 tend à s'opposer à la rotation, donc à ramener S_2 dans sa position initiale. D'après le rappel ci-dessus, cette position est telle que $\overrightarrow{B_1}$ sorte par la face nord créée par le courant induit dans S_2 : ce courant doit donc avoir le sens +.

b) • Présentation qualitative de l'expérience : la bobine S_2, fixe, est baignée par un champ magnétique uniforme dans l'espace et variable dans le temps; le flux magnétique à travers S_2, dû à S_1, varie; il apparaît dans S_2 une f.é.m. d'induction; l'oscillographe permet de visualiser les variations de la tension aux bornes de S_2 en fonction du temps.

• Soit $\overrightarrow{u_N}$ le vecteur unitaire normal au circuit S_2, $\overrightarrow{u_N}$ est parallèle à x'x, de sens x' vers x.
Comme le courant dans S_1 garde le sens indiqué, le vecteur $\overrightarrow{B_1}$ est toujours parallèle à x'x, de sens x' vers x, de module variable $B_1 = \mu_0 n_1 I_1$.
Le flux à travers S_2, est $\Phi = N_2 s_2 \overrightarrow{u_N} \cdot \overrightarrow{B_1} = N_2 s_2 B_1$, puisque $\overrightarrow{u_N}$ et $\overrightarrow{B_1}$ ont mêmes direction et sens. Par suite $\Phi = \mu_0 N_2 s_2 n_1 I_1$.

• Le graphique nous permet de déterminer comment varie Φ en fonction du temps. On peut donc en déduire la f.é.m. d'induction instantanée dans le circuit S_2, muni du sens + indiqué :

$$e = \frac{-d\Phi}{dt} = -\mu_0 N_2 s_2 n_1 \frac{dI_1}{dt} = -5{,}026 \cdot 10^{-4} \frac{dI_1}{dt}. \quad \text{(u S.I.)} \ ①$$

• L'oscillographe visualise la d.d.p. (différence de potentiel) :

$$V_Y - V_M = V_A - V_C = u_{AC}.$$

Appliquons la loi d'Ohm à la bobine de bornes, suivant le sens +, A puis C (revoir ℳ 53) : $u_{AC} = ri - e = -e$ car l'oscillographe de très grande résistance interne empêche le passage d'un courant.
En résumé l'oscillographe visualise $V_Y - V_M = u_{AC} = -e$.

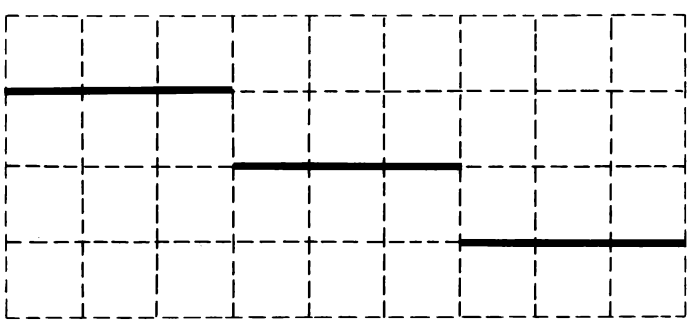
• Application numérique. Pour évaluer e, d'après ①, il faut évaluer $\frac{dI_1}{dt}$. La représentation graphique de I_1 en fonction du temps est une suite de segments de droite : d'après une propriété des fonctions affines ou linéaires (voir ℳ 56), la dérivée de I_1 par rapport au temps, $\frac{dI_1}{dt}$ se confond avec le taux de variation $\frac{\Delta I_1}{\Delta t}$. Au cours d'une période T, ce taux prend trois valeurs :

— lorsque t passe de 0 à 10 ms, $\Delta t = 10 \cdot 10^{-3}\ s = 10^{-2}\ s$, $\Delta I_1 = 2\ A$, $\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 200\ A \cdot s^{-1}$, par suite d'après ① dans cet intervalle, $V_Y - V_M = -e = 0{,}1\ V$;

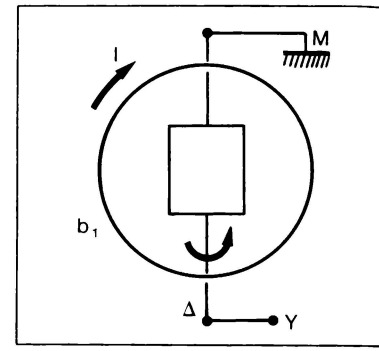
— lorsque t passe de 10 ms à 20 ms, $\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 0$, par suite dans cet intervalle $V_Y - V_M = -e = 0$;

— lorsque t passe de 20 ms à 30 ms, $\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{-2}{10^{-2}} = -200\ A \cdot s^{-1}$, par suite dans cet intervalle $V_Y - V_M = -0{,}1\ V$.

• Courbe observée sur l'écran.
Comme la période de balayage est égale à T, le spot se retrouve tous les temps T au même point de l'écran : la courbe est stabilisée.
A partir des données concernant le balayage, on en déduit facilement que 10 ms sont représentées horizontalement par 3 cm; à partir de la sensibilité verticale, on en déduit qu'un cm représente verticalement 0,1 V.
L'écran présente donc l'aspect ci-dessous.



E 131. *Pour obtenir un champ magnétique pratiquement uniforme, on utilise deux bobines plates identiques* b_1 *et* b_2, *de même axe x'x, situées à une distance l'une de l'autre égale à leur rayon.*



a) *Le courant circule dans* b_1 *dans le sens indiqué, dans quel sens chemine-t-il dans* b_2? *Quelle doit être son intensité dans* b_2? *Déterminer la direction et le sens du vecteur champ magnétique créé par l'ensemble* (b_1, b_2) *appelé «bobines de Helmholtz». Le module de ce champ est* $B = 0{,}1$ T.

b) *Un cadre comportant* $n = 100$ *spires de surface chacune* $S = 120$ cm^2, *peut tourner autour d'un axe* Δ, *perpendiculaire à l'axe x'x commun aux deux bobines. On imprime à ce cadre un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire* $N = 10$ tr·s^{-1}. *Un oscillographe permet de visualiser la courbe représentant* $u = V_Y - V_M$ *en fonction du temps.*

α) *Expliquer l'origine de cette tension* u.

β) *Montrer que* u *peut se mettre sous la forme* $u = U_{maxi} \sin(2\pi Nt + \varphi)$, U_{maxi} *et* φ *étant des constantes que l'on précisera,* t *étant le temps.*

γ) *Quelle est l'allure de la courbe observée sur l'écran de l'oscillographe?*

57 **Rappel sur les dérivées.**

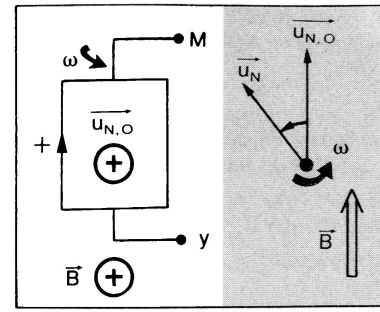
Fonction	Dérivée par rapport à x
$\sin x$	$\cos x$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$

S 131. *a)* • Le champ magnétique uniforme est surtout dû, vers b_1 à b_1, vers b_2 à b_2 : les champs créés par b_1 et b_2 doivent donc avoir mêmes direction, sens et module. Par suite les bobines étant identiques, les courants dans b_1 et b_2 doivent être de même sens et de même intensité.

• Considérons un point P de x'x. Le dispositif coïncide avec lui-même si on le tourne par la pensée autour de x'x : le champ magnétique en P est donc parallèle à x'x. Comme le champ est uniforme entre les deux bobines, il a obligatoirement cette direction.

• D'après la règle de la main droite appliquée à partir du sens du courant dans b_1, le champ magnétique uniforme dû aux bobines de Helmholtz est dirigé vers l'arrière de la figure, c'est-à-dire de b_1 vers b_2.

b) α) • Présentation qualitative de l'expérience : le cadre est traversé par le flux magnétique engendré par les bobines de Helmholtz; ce flux varie constamment parce que le cadre tourne; pendant toute la rotation va naître dans le cadre une f.é.m. d'induction; aux bornes du cadre, devenu dipôle actif à cause du phénomène d'induction, il existe donc une d.d.p. u.



β) • L'énoncé ne précise pas le sens + le long du cadre, l'origine des dates.
A la date t = 0 supposons que le cadre passe dans la position, indiquée sur la partie gauche de la figure, telle que le vecteur unitaire normal $\overrightarrow{u_{N,0}}$ soit de mêmes direction et sens que $\vec{B}$.

• La vitesse angulaire du cadre est N exprimée en $tr \cdot s^{-1}$, elle est donc $\omega = 2\pi N$ exprimée en $rad \cdot s^{-1}$.

• A la date t, le cadre est repéré par l'angle $(\overrightarrow{u_{N,0}}, \overrightarrow{u_N})$ (voir partie droite de la figure). Prenons le sens positif de rotation dans le sens du mouvement.
Comme la rotation est uniforme $(\overrightarrow{u_{N,0}}, \overrightarrow{u_N}) = \omega t = 2\pi Nt$.
Le flux magnétique à travers le cadre, à la date t, est :

$$\Phi = nS\ \overrightarrow{u_N} \cdot \vec{B} = nsB\ \cos(\overrightarrow{u_N}, \vec{B}).$$

Comme $\cos(\overrightarrow{u_N}, \vec{B}) = \cos(\vec{B}, \overrightarrow{u_N}) = \cos(\overrightarrow{u_{N,0}}, \overrightarrow{u_N})$, il s'ensuit :

$$\Phi = nSB\ \cos 2\pi Nt.$$

• La f.é.m. d'induction $e = \dfrac{-d\Phi}{dt} = -nSB\ (-2\pi N \sin 2\pi Nt)$, la parenthèse représente la dérivée de cos 2πNt par rapport à t (revoir ℳ 57).
Après simplification $e = 2\pi nSBN \sin 2\pi Nt$.

• D'après la loi d'Ohm, le sens + entrant dans le cadre par Y et sortant par M, $u = V_Y - V_M = ri - e = -e$ car l'oscillographe de très grande résistance interne empêche le passage d'un courant.
Donc $u = -2\pi nSBN \sin 2\pi Nt = 2\pi nSBN \sin(2\pi Nt + \pi)$.
On a ainsi mis u sous la forme $u = U_{maxi} \sin(2\pi Nt + \varphi)$ avec :

$$U_{maxi} = 2\pi nSBN = 7{,}54\ V \text{ et } \varphi = \pi\ rad.$$

Remarque : nous avons pris l'angle $(\vec{B}, \overrightarrow{u_{N,0}}) = 0$ grâce au choix du sens + et de la date t = 0. Avec d'autres conventions, cet angle peut être différent, alors la valeur de φ est différente de π rad.

γ) Sur l'écran de l'oscillographe, utilisé avec balayage, est visualisée la courbe représentant u en fonction du temps. Cette courbe est une sinusoïde.
Pour cette raison u est appelée une tension alternative sinusoïdale, alternative car elle oscille autour de la valeur zéro. Le cadre est donc un petit alternateur.

E 132. *Un solénoïde comprend* $N = 1000$ *spires, de diamètre* $d = 6$ cm.
Il est court-circuité sur lui-même constituant ainsi un circuit fermé de résistance totale $R = 0{,}4\ \Omega$.
Ce solénoïde, d'axe x'x horizontal, peut tourner autour d'un axe vertical, fixe, Δ.
La seule source de champ magnétique à considérer est la Terre. Le champ magnétique terrestre $\vec{B_T}$ *a une composante horizontale* $\vec{B_H}$, *de module* $B_H = 2 \cdot 10^{-5}$ T, *et une composante verticale* $\vec{B_V}$.

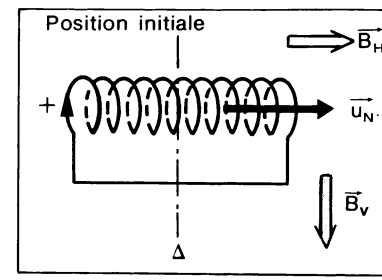
a) *Montrer que lorsqu'on tourne le solénoïde autour de* Δ, *le flux du champ magnétique* $\vec{B_V}$, *à travers le solénoïde, reste nul.*

b) *Le solénoide est initialement dans une position telle que son axe x'x ait la direction Sud-Nord. En* $\delta t = 0{,}1$ s, *on tourne le solénoïde de un demi-tour.*

α) *Quelle est l'intensité moyenne du courant dans le solénoïde?*

β) *Quelle est la quantité d'électricité induite? Cette quantité dépend-elle de la durée* δt *nécessaire pour effectuer la rotation?*

S 132. *a*) • Choisissons un sens positif afin de mesurer algébriquement le flux et la f.é.m. d'induction qui prendra naissance lorsque le flux variera.
Le vecteur unitaire $\vec{u_N}$ est normal au plan des spires, il a la direction de l'axe x'x du solénoïde. Au cours de la rotation autour de l'axe vertical Δ, x'x donc $\vec{u_N}$ restent horizontaux.



• Le flux de $\vec{B_V}$ à travers le solénoïde est, en appelant S la surface d'une spire :

$$\Phi_V = 2\pi NS\ \vec{u_N} \cdot \vec{B_V}.$$

Comme $\vec{B_V}$, vertical reste perpendiculaire à $\vec{u_N}$, horizontal, le produit scalaire $\vec{u_N} \cdot \vec{B_V} = 0$ et Φ_V est nul.

b) α) • D'après la question précédente le seul flux qui traverse le solénoïde est celui de $\vec{B_H}$.

• Initialement, supposons que $\vec{u_N}$ et $\vec{B_H}$ aient le même sens (ils ont obligatoirement la même direction puisque x'x est orienté Sud-Nord).
Le flux initial $\Phi_i = NS\ \vec{u_N} \cdot \vec{B_H} = NS\,B_H$.

• Après la rotation de un demi-tour, $\vec{u_N}$ a maintenant le sens opposé à $\vec{B_H}$, le flux final $\Phi_f = NS\ \vec{u_N} \cdot \vec{B_H} = -NS\,B_H$.

• La f.é.m. d'induction moyenne est :

$$e = \frac{-\delta\Phi}{\delta t} = \frac{-(\Phi_f - \Phi_i)}{\delta t} = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{\delta t} = \frac{2NS\,B_H}{\delta t}.$$

• D'après la loi de Pouillet, $i = \dfrac{e}{R} = \dfrac{2NS\,B_H}{R \cdot \delta t}$.

Comme $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, il s'ensuit : $i = \dfrac{\pi N d^2 B_H}{2R \cdot \delta t} = 2{,}83 \cdot 10^{-3}\ A = 2{,}83\ mA$.

• L'intensité algébrique étant positive, le courant moyen chemine dans le sens +.

• Remarque : d'après la loi de Lenz le courant induit freine le déplacement, il tend à ramener le solénoïde dans sa position initiale. Cette position doit être telle que $\overrightarrow{B_H}$ sorte par la face nord créée par le courant induit : ce dernier doit donc cheminer dans le sens + (voir figure).

β) Appelons q la quantité d'électricité transportée suivant le sens + choisi, cette quantité d'électricité est liée à l'intensité du courant i et à la durée d'existence de ce courant δt par la relation $q = i \cdot \delta t$.

• Comme $i = \frac{e}{R} = \frac{-\delta\Phi}{R \cdot \delta t}$, $q = \frac{-\delta\Phi}{R}$: la quantité d'électricité induite est indépendante de δt. (plus δt est faible plus i est grand, mais q reste inchangée.)

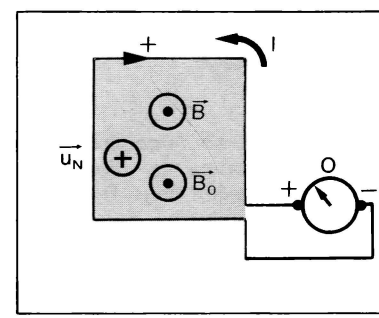
Numériquement $q = i \cdot \delta t = \frac{\pi N d^2 B_H}{2R} = 2{,}83 \cdot 10^{-4}$ C.

E 133. *Un cadre est constitué par* N = 100 *spires de surface chacune* S = 20 cm^2. *Ce cadre fixe est placé perpendiculairement aux lignes de champ magnétique d'un champ uniforme dans l'espace mais variable dans le temps.*
Le cadre a pour résistance R = 2 Ω, *il est relié à un milliampèremètre, polarisé, à zéro central, de résistance* r = 0,5 Ω.
On diminue régulièrement le module B *du champ magnétique qui passe en* 2 s *de la valeur* B = 0,2 T *à la valeur zéro.*

a) *Faire un schéma : y préciser le vecteur* B, *le sens + choisi, le sens du courant induit.*

b) *Quelle est l'intensité du courant induit?*

S 133. *a*) • Prenons comme sens positif pour mesurer l'intensité algébrique i le sens qui traverse l'ampèremètre polarisé à zéro central de sa borne + vers sa borne − (le même branchement pourrait être réalisé avec un ampèremètre digital ou numérique qui afficherait ainsi directement i, positif ou négatif).



• Supposons que les lignes de champ magnétique viennent vers l'avant de la figure.
• D'après la loi de Lenz le courant induit tend à s'opposer à la variation de $\vec{B}$. Comme $\vec{B}$ diminue, le courant induit crée un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ de même sens que $\vec{B}$ pour essayer de compenser la diminution de $\vec{B}$. Par suite d'après la règle de la main droite, le pouce pointant dans le sens de $\overrightarrow{B_0}$, donc de $\vec{B}$, les doigts courbés nous indiquent le sens du courant : ce courant sur la figure a le sens direct.
• Remarques : — Pour déterminer le sens du courant induit nous ne nous sommes pas servi du sens +, ce courant a un sens indépendant du sens + choisi.
— Avec notre sens +, i < 0 : l'aiguille de l'ampèremètre dévie vers la gauche du zéro central (un ampèremètre digital afficherait −...).
— Si le module de $\vec{B}$ augmentait, au lieu de diminuer, cette fois-ci $\overrightarrow{B_0}$ aurait le sens opposé à $\vec{B}$ pour essayer de s'opposer à l'augmentation de B.

b) • Le cadre est traversé par le flux magnétique $\Phi = NS\,\overrightarrow{u_N}\cdot\overrightarrow{B}$ (on néglige le flux propre dû à $\overrightarrow{B_0}$, revoir ℳ 54 1)).
Avec le sens + choisi, $\overrightarrow{u_N}$ et $\overrightarrow{B}$ sont de sens contraire : $\Phi = -NSB$.

• Pendant la diminution de $\overrightarrow{B}$, le cadre est le siège d'une f.é.m. induite $e = -\frac{d\Phi}{dt} = NS\frac{dB}{dt}$ (attention aux 2 signes − qui se compensent!).
Comme la variation de B est régulière (ce qui signifie qu'on peut admettre que B est fonction affine du temps, revoir ℳ 56), la valeur de la dérivée $\frac{dB}{dt}$ se confond avec le taux de variations $\frac{\Delta B}{\Delta t}$.

D'où $e = NS\frac{\Delta B}{\Delta t}$, pendant la variation régulière de B, e est constant.

• D'après la loi de Pouillet :

$$i = \frac{e}{R+r} = \frac{NS}{R+r}\cdot\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Application numérique $\Delta B = -0{,}2$ T, $\Delta t = 2$ s, d'où :

$$i = -8\cdot10^{-3}\ \text{A}$$
$$= -8\ \text{mA}.$$

Comme l'intensité i est négative, le courant induit circule dans le sens direct : c'est ce que nous avions prévu à l'aide de la loi de Lenz.

E 134. *Un solénoïde comportant* $n = 4\,000$ *spires par* m, *très long, fixe, est alimenté par un générateur de courant continu de f.é.m.* $E = 6$ V, *de résistance interne négligeable devant celle,* $R = 5\ \Omega$, *du solénoïde. A l'intérieur du solénoïde se trouve une petite bobine fixe, de même axe que le solénoïde, de résistance* $r = 1{,}6\ \Omega$. *Cette bobine comprend* $N = 60$ *spires, chacune ayant une aire* $S = 18\ \text{cm}^2$.

a) *La petite bobine est court-circuitée sur elle-même (c'est-à-dire que ses bornes* E *et* F *sont reliées par un fil de résistance négligeable). On ferme le circuit du solénoïde.*

α) *Déterminer le sens du courant induit dans la petite bobine.*

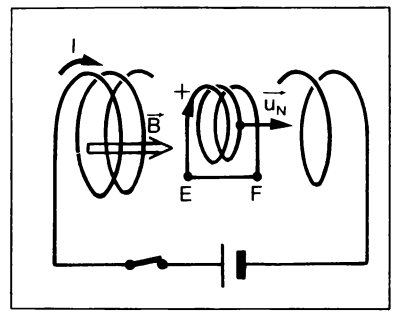
β) *Déterminer la quantité d'électricité induite.*

b) *On retire le fil qui relie* E *et* F. *On ouvre le circuit du solénoïde : en* $\delta t = 3$ ms *l'intensité du courant dans le solénoïde décroît de sa valeur initiale à zéro. Montrer qu'il apparaît entre* E *et* F *une différence de potentiel* $V_E - V_F$.

S 134. *a*) *α*) • Présentation qualitative de l'expérience : lorsque le circuit générateur-solénoïde est ouvert le flux initial à travers la petite bobine $\Phi_i = 0$, on ne tient pas compte du flux magnétique terrestre qui reste constant; lorsqu'on ferme le circuit, la bobine est baignée par un champ magnétique uniforme B (voir figure), elle est traversée par le flux final Φ_f; pendant

l'établissement du courant de durée δt faible, le flux à travers la bobine varie, elle devient le siège d'une f.é.m. induite qui donne naissance à un courant induit.

• Pour déterminer le sens du courant induit, appliquons la loi de Lenz. Pendant l'établissement du courant dans le circuit solénoïde-générateur, le module B du champ magnétique inducteur augmente : le courant induit dans la bobine crée un champ magnétique $\vec{B_0}$ de sens opposé à $\vec{B}$ pour essayer de s'opposer à l'augmentation de B.



En appliquant la règle de la main droite, le pouce pointant dans le sens de $\vec{B_0}$, donc dans le sens opposé à $\vec{B}$, les doigts courbés indiquent le sens du courant induit. Avec le sens + choisi sur la figure, le courant induit circule dans le sens négatif.

β) • Initialement le flux à travers la bobine est $\Phi_i = 0$.

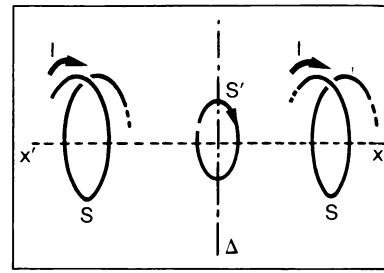
• Après l'établissement du courant le flux devient $\Phi_f = NS\,\vec{u_N}\cdot\vec{B}$. Le vecteur $\vec{B}$ est parallèle à l'axe du solénoïde, a le sens indiqué sur la figure, a pour module $B = \mu_0 nI = \mu_0 n \frac{E}{R}$ (puisque $I = \frac{E}{R}$ d'après la loi de Pouillet appliquée au circuit sans dérivation générateur-solénoïde). Avec le sens + choisi le long du fil de la bobine, $\vec{u_N}$ et $\vec{B}$ sont de même sens. Par suite $\Phi_f = \mu_0 NSn \frac{E}{R}$.

• La f.é.m induite moyenne qui prend naissance pendant l'établissement du courant est $e = \frac{-\delta\Phi}{\delta t} = \frac{-(\Phi_f - \Phi_i)}{\delta t} = \frac{-\mu_0 NSnE}{R\cdot\delta t}$.

L'intensité algébrique moyenne du courant induit $i = \frac{e}{r}$, d'après la loi de Pouillet algébrisée appliquée au circuit bobine. Ce courant véhicule la quantité d'électricité algébrique $q = i\cdot\delta t = \frac{e}{r}\cdot\delta t = \frac{-\mu_0 NSnE}{Rr} = -4{,}07\cdot10^{-4}$ C. (Le signe − précise que le courant chemine dans le sens négatif.)

b) Nous ne donnons que quelques indications :
$V_E - V_F = ri - e = -e$ car circuit ouvert;
e est opposé à la valeur déterminée au *a*);
D'où $V_E - V_F = -\frac{\mu_0 NSnE}{R\cdot\delta t} = -0{,}217\ V = -217\ mV$.

E 135. a) *Donner les caractéristiques du vecteur champ magnétique* $\vec{B}$ *à l'intérieur d'un solénoïde* S *de longueur* L *comprenant un nombre total de spires* N, *quand il est parcouru par un courant d'intensité* I.
Quelle doit être la valeur de I, *pour que la mesure du champ magnétique créé soit de* $4 \cdot 10^{-3}$ *tesla? On donne* N = 1000 *spires*; L = 1,30 m.



b) *A l'intérieur du solénoïde* S *est placée une petite bobine* S', *comprenant* N' *spires, dont chacune a une section* s'. *Les deux bobines ont le même axe* x'x, *et cet axe est horizontal.*

α) *Quelle est la valeur du flux du champ magnétique* $\vec{B}$ *à travers la bobine* S'? *On donne* N' = 800 *spires*; s' = 10 cm^2.

β) *On fait décroître l'intensité* I *du courant traversant* S. *La décroissance est effectuée en* 0,2 s, *selon une fonction affine du temps, à partir de la valeur calculée en* a) *et jusqu'à la valeur zéro.*
Quelle est le force électromotrice d'induction dont la bobine S' *est le siège? Préciser sur un schéma, les sens de* $\vec{B}$, *du courant* I *et du courant qui traverserait* S' *si on réunissait les deux extrémités de la bobine* S'.

γ) *On rétablit dans le solénoïde* S *l'intensité* I *calculée en* a) *et cette intensité sera maintenue constante dans toute cette question. On imprime à la bobine* S' *un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical* Δ *passant par son centre.*
On branche un oscillographe électronique aux bornes de S'. *Quelle est l'allure de la courbe observée sur l'écran? Expliquer le phénomène.*

(D'après bac)

S 135. (Certaines parties ne comportent que les réponses.)

a) $\vec{B}$: direction x'x, sens x' vers x.

$$I = \frac{BL}{\mu_0 N} = 4{,}14 \text{ A.}$$

b) $\alpha)$ $\Phi = N's'\overrightarrow{u_N} \cdot \vec{B} = N's'B = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ Wb

$\beta)$ $e = \dfrac{-d\Phi}{dt} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (car fonction affine), d'où $e = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$ V.

Soit r' la résistance de S' : $i = \dfrac{e}{r'} > 0$, le courant circule dans le sens + de S'.

$\gamma)$ • L'oscillographe empêche le passage d'un courant, $i = 0$. Suivant son branchement il visualise la courbe représentant, en fonction du temps t, $u = r'i - e = -e$ ou bien $u = -(r'i - e) = e$. Cette courbe est une sinusoïde de période T, égale à la période de rotation de S' autour de Δ.

• Le flux à travers S' est, à la date t, $\Phi = N's'\overrightarrow{u_N} \cdot \vec{B}$. Supposons qu'à la date $t = 0$, $\overrightarrow{u_N}$ et $\vec{B}$ soient de mêmes direction et sens. Soit ω la vitesse angulaire de S', en $rad \cdot s^{-1}$. La rotation de $\overrightarrow{u_N}$, lié à S', étant uniforme : $(\vec{B}, \overrightarrow{u_N}) = \omega t$ (les angles étant mesurés positivement dans le sens de la rotation).
Par suite $\Phi = N's'B \cos(\overrightarrow{u_N}, \vec{B}) = N's'B \cos(\vec{B}, \overrightarrow{u_N})$

$$= N's'B \cos \omega t$$

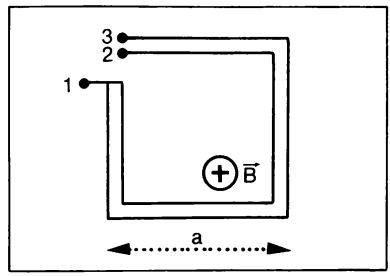
La f.é.m. d'induction $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = N's'B\omega \sin \omega t$ (revoir ℳ 57) : c'est une fonction sinusoïdale du temps.

E 136. *La borne ① est reliée (voir figure) :*
— à la borne ② par un fil isolé, coudé à angles droits de façon à former un carré pratiquement fermé de côté $a = 15$ cm;
— à la borne 3 *par un fil isolé formant aussi un carré de côté pratiquement égal à* $a = 15$ cm.
Le cadre fixe ainsi formé est baigné par un champ magnétique $\vec{B}$, *perpendiculaire au plan du cadre, uniforme dans l'espace, variable dans le temps* t *suivant la loi* $B = 10^{-2} \sin 314\ t$ (u S.I.).
Que peut-on dire des tensions électriques

a) *entre les bornes* 1 *et* 2*?*

b) *entre les bornes* 1 *et* 3*?*

c) *entre les bornes* 2 *et* 3*?*



S 136. *a)* • Orientons le fil 1 — 2 de 1 vers 2. Le vecteur unitaire normal à ce circuit, $\vec{u_N}$, est parallèle à $\vec{B}$, de sens opposé. Le flux à travers ce circuit est $\Phi = a^2 \vec{u_N} \cdot \vec{B} = -a^2 B$.

• La f.é.m. d'induction qui prend naissance dans le circuit 1 — 2 est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = +a^2 \cdot \frac{dB}{dt}.$$

Numériquement $\dfrac{dB}{dt} = 314 \cdot 10^{-2} \cos 314\,t$, d'où $e = +7{,}06 \cdot 10^{-2} \cos 314\ t$.

• D'après la loi d'Ohm, en remarquant que le sens + va de 1 vers 2 et que le circuit est ouvert :

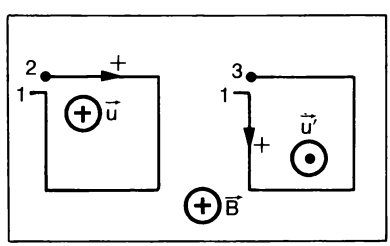
$$V_1 - V_2 = ri - e = -e = -7{,}06 \cdot 10^{-2} \cos 314\ t \qquad \text{(u S.I.)}$$

b) Les circuits 1 — 2 et 1 — 3 sont pratiquement identiques : à chaque instant $V_1 - V_3 = V_1 - V_2$.

c) • Orientons le fil du circuit 2 — 3 dans le sens positif 2 — 1 — 3.

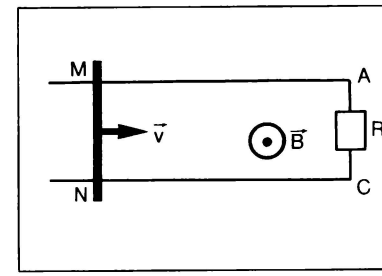
• Le circuit peut être considéré comme constitué du circuit 2 — 1 et du circuit 1 — 3 (dessinés séparés pour plus de clarté).

• Le flux Φ_1 à travers le circuit 2 — 1 est $\Phi_1 = a^2 \vec{u} \cdot \vec{B}$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{B}$ sont de même sens (voir la figure où l'on peut vérifier le sens de $\vec{u}$ à partir du sens + grâce à la règle de la main droite), $\Phi_1 = a^2 B$.



• Le flux Φ_2 à travers le circuit 1 − 3 est $\Phi_2 = \vec{a}\,\vec{u'} \cdot \vec{B}$. Cette fois-ci $\vec{u'}$ et $\vec{B}$ sont de sens contraire, $\Phi_2 = -a^2 B$.
• Le flux total dans le circuit 2 − 3 est $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$. La f.é.m. d'induction dans l'ensemble du circuit 2 − 3 est donc nulle, par suite $V_2 - V_3 = 0$.
Remarque : les flux magnétiques terrestres, à travers les circuits fixes considérés dans ce problème, étant constants ne donnent lieu à aucune phénomène d'induction.

E 137. *Une tige conductrice est en contact en* M *et* N *avec deux rails métalliques parallèles, horizontaux. Elle est déplacée dans le plan des rails, en restant perpendiculaire aux rails, à la vitesse constante* $v = 0{,}7\ m \cdot s^{-1}$. *L'ensemble est baigné par un champ magnétique uniforme, vertical, ascendant, de norme* $\|\vec{B}\| = 0{,}20$ T. *La longueur* $MN = \ell = 0{,}15$ m.
Un conducteur ohmique de résistance $R = 5{,}0\ \Omega$ *relie les deux rails, les rails et la tige* MN *ont une résistance dont la valeur est négligeable devant* R.



a) *Déterminer la f.é.m. d'induction qui prend naissance dans le circuit :*

α) *à partir du flux à travers le circuit;*

β) *à partir du champ électromoteur dans* MN.

b) *En déduire l'intensité et le sens du courant induit.*

c) *Pour déplacer la tige* MN *à cette vitesse constante, il faut appliquer une force horizontale* $\vec{F}$ *sur celle-ci. Déterminer, après une étude dynamique du mouvement de la tige, les caractéristiques de la force* $\vec{F}$. *Les frottements sont supposés négligeables.*

58 **Champ électromoteur** $\vec{\mathcal{E}}$ (ou $\vec{E_m}$)

• Soit MN un conducteur rectiligne se déplaçant dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Considérons un porteur de charge de MN, il est ainsi entraîné à la vitesse $\vec{v}$ par rapport à la Terre, il subit donc une force magnétique ou de Lorentz (revoir ℳ 37) $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. On montre que tout se passe comme si le porteur était soumis à un champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ tendant à l'entraîner dans le conducteur avec la même force $\vec{F}$, par suite $\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Ce champ $\vec{\mathcal{E}}$ est appelé le champ électromoteur d'induction : $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$, il se mesure en $V \cdot m^{-1}$.
• Si le conducteur rectiligne MN est **en translation** à la vitesse $\vec{v}$ **dans un champ magnétique uniforme**, le vecteur $\vec{\mathcal{E}}$ est le même en tous ses points. Alors on montre que dans MN, **orienté de M vers N,** prend naissance une f.é.m. d'induction :

$$e_{MN} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{MN}.$$

• Si le circuit comprenant MN est fermé et si la seule f.é.m. de ce circuit est e_{MN}, le courant induit a le sens de $\vec{\mathcal{E}}$ (revoir ℳ 55).

S 137. *a*) α) • Prenons pour orienter le circuit, le sens M vers N dans la tige MN. Le vecteur unitaire normal est parallèle à $\vec{B}$, de même sens.

• A la date t, posons que AM = d. Le flux à travers le circuit pratiquement rectangulaire est :

$$\Phi = \ell d \vec{u_N} \cdot \vec{B} = \ell dB \qquad (1)$$

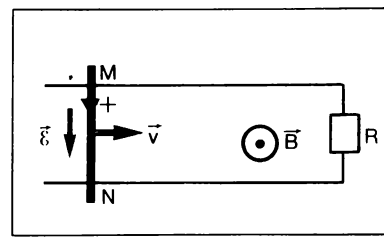
• A la date $t + \delta t$, le mouvement de M (ou N) étant uniforme $AM = d - v \cdot \delta t$. Le flux à travers le circuit est $\Phi + \delta\Phi = \ell (d - v \cdot \delta t) \cdot B$ (2).

• D'après (1) et (2), $\delta\Phi = -\ell vB \cdot \delta t$.

• La f.é.m. d'induction dans le circuit est $e = \dfrac{-\delta\Phi}{\delta t} = +\ell vB$: elle est indépendante de δt, donc constante. Numériquement $e = +2{,}1 \cdot 10^{-2}$ V.

β) • Le champ électromoteur dans MN est $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$.

— Direction de $\vec{\mathcal{E}}$: $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{B}$ donc est dans le plan de la figure; $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{v}$ donc $\vec{\mathcal{E}}$ est parallèle à MN.



— Sens de $\vec{\mathcal{E}}$: le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{\mathcal{E}})$ est direct, donc d'après la règle des trois doigts de la main droite, $\vec{\mathcal{E}}$ a le sens M vers N.

— Module de $\vec{\mathcal{E}}$: $\mathcal{E} = vB\,|\sin(\vec{v}, \vec{B})| = vB$ puisque $(\vec{v}, \vec{B}) = 90°$.

• La tige étant en translation dans un champ magnétique uniforme, le vecteur $\vec{\mathcal{E}}$ est le même tout le long de MN. Prenons le sens + de M vers N. La tige est le siège d'une f.é.m. induite $e_{MN} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{MN} = \mathcal{E} \cdot MN = vB\ell = +2{,}1 \cdot 10^{-2}$ V.

b) • D'après la loi de Pouillet appliquée au circuit sans dérivation (tige, rails, résistor), le sens + traversant MN de M vers N,

$$i = \frac{e}{R} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{-2}}{5} = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 4{,}2\ \text{mA}.$$

Cette intensité est positive, le courant induit circule dans le sens +.

• Remarque : le circuit ne comportant pas d'autre f.é.m. que e_{MN}, le vecteur $\vec{\mathcal{E}}$ indique le sens de circulation du courant.

c) • Le système est la barre MN.

• Le repère est la Terre, il est pratiquement galiléen.

• MN se translatant à vitesse $\vec{v}$ constante, le vecteur accélération $\vec{a}$ de tous ses points, en particulier de son centre d'inertie, est nul.

• La tige est soumise à 4 forces :
— son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ vertical vers le bas;
— la réaction $\vec{\mathcal{R}}$ due aux deux rails, perpendiculaire à ceux-ci puisque les frottements sont négligeables, donc verticale vers le haut;
— la force $\vec{F}$ nécessaire pour déplacer la tige, horizontale d'après l'énoncé;
— enfin la force de Laplace $\vec{f}$ que nous allons présenter. MN est parcouru par le courant d'intensité $I = |i| = i = 4{,}2 \cdot 10^{-3}$ A, dans le sens M vers N. La force

$\vec{f} = I\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$. Comme $\vec{f} \perp \vec{B}$, $\vec{f}$ est dans le plan des rails. Comme $\vec{f} \perp \overrightarrow{MN}$, $\vec{f}$ est parallèle aux rails. Comme le trièdre $(\overrightarrow{MN}, \vec{B}, \vec{f})$ est direct, $\vec{f}$ a le sens opposé à $\vec{v}$. Comme $\overrightarrow{MN} \perp \vec{B}$, $f = I\ell B = 1{,}26 \cdot 10^{-4}$ N.

• D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{P} + \vec{\mathcal{R}} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$

• Projetons sur un axe vertical ascendant, en remarquant que $\vec{F}$ et $\vec{f}$ sont horizontales, $-P + \mathcal{R} + 0 + 0 = 0$ soit $P = \mathcal{R}$. Les deux forces $\vec{P}$ et $\vec{\mathcal{R}}$ de même direction, de même module, de sens opposés, sont opposées : $\vec{P} + \vec{\mathcal{R}} = \vec{0}$.
En reportant dans (3), il s'ensuit $\vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$. La force $\vec{F}$, opposée à $\vec{f}$, est donc parallèle aux rails, dans le sens de $\vec{v}$, de module $1{,}26 \cdot 10^{-4}$ N.

• Remarque : Il est évident d'après la loi de Lenz, que la force de Laplace $\vec{f}$ due au courant induit tend à freiner le déplacement. Nous aurions pu partir du sens de $\vec{f}$, opposé à celui de $\vec{v}$, pour déterminer le sens du courant induit.

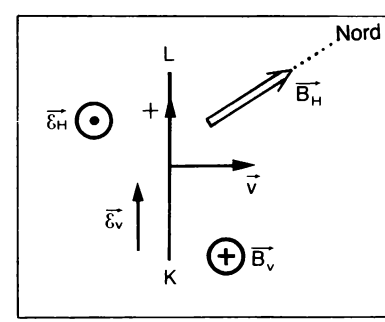
E 138. *On appelle* K *et* L *les extrémités des ailes d'un avion. On admettra que tout se passe dans ce problème comme si* K *et* L *étaient reliées par une tige conductrice rectiligne.* $KL = \ell = 40$ m.
L'avion est en vol : KL *se translate dans un plan horizontal, à la vitesse* $\vec{v}$ *perpendiculaire à* KL. *Le vecteur vitesse* $\vec{v}$ *est constant, sa norme est* $880\ km \cdot h^{-1}$.

a) *Déterminer la différence de potentiel* $V_K - V_L$.

b) *Quel est le champ électrique entre* K *et* L?
La seule source de champ magnétique est la Terre : pour la portion de trajectoire étudiée ce champ est uniforme; sa composante horizontale $\vec{B}_H$ *a pour mesure* $B_H = 2 \cdot 10^{-5}$ T; *sa composante verticale* $\vec{B}_V$ *a pour mesure* $B_V = 4 \cdot 10^{-5}$ T, *elle est dirigée vers le sol.*

S 138. *a)* • Présentation qualitative du phénomène : sous l'action du champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}}$, les électrons libres du métal constituant les ailes se mettent en mouvement à contre-sens de $\vec{\mathcal{E}}$; comme le circuit KL est ouvert en K et L, ces électrons s'accumulent vers l'une des extrémités qui se charge ainsi négativement; l'autre extrémité présente alors un déficit d'électrons, elle se charge positivement; très vite le mouvement électronique s'arrête car le champ électrique dû aux extrémités + et − annule les effets du champ électromoteur.

• Le champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge (\vec{B}_v + \vec{B}_H)$ peut être considéré comme la somme de $\vec{\mathcal{E}}_V = \vec{v} \wedge \vec{B}_V$ et $\vec{\mathcal{E}}_H = \vec{v} \wedge \vec{B}_H$.
Les champs électromoteurs sont uniformes dans KL qui est en translation, ils donnent naissance à des f.é.m. d'induction $e_V = \vec{\mathcal{E}}_V \cdot \overrightarrow{KL}$ et $e_H = \vec{\mathcal{E}}_H \cdot \overrightarrow{KL}$ mesurées positivement suivant le sens + de K vers L.



• Comme $\vec{\mathcal{E}}_V \perp \vec{B}_V$, $\vec{\mathcal{E}}_V$ est dans le plan horizontal de la figure.
Comme $\vec{\mathcal{E}}_V \perp \vec{v}$, $\vec{\mathcal{E}}_V$ est parallèle à KL. Le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}_V, \vec{\mathcal{E}}_V)$ étant direct, $\vec{\mathcal{E}}_V$ a le sens K vers L. Le module de $\mathcal{E}_V = vB_V|\sin(\vec{v}, \vec{B}_V)| = vB_V$ car $(\vec{v}, \vec{B}_V) = 90°$.
Par suite $e_V = \mathcal{E}_V \cdot KL = vB_V\ell$.

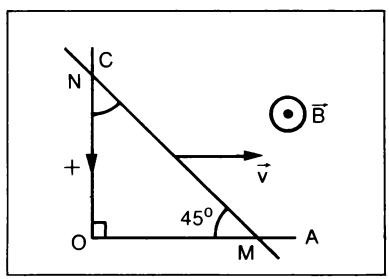
• Comme $\vec{\mathcal{E}_H}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{B_H}$ qui sont deux directions horizontales différentes, $\vec{\mathcal{E}_H}$ est vertical, par suite $\vec{\mathcal{E}_H} \perp \overrightarrow{KL}$ et $e_H = 0$. (Remarque : si l'avion progresse vers le Nord, alors $\vec{v} /\!/ \vec{B_H}$ et $\vec{\mathcal{E}_H} = \vec{0}$, là encore $e_H = 0$).

• Appliquons la loi d'Ohm au dipôle KL, le sens + entrant par K, sortant par L : $V_K - V_L = ri - (e_V + e_H) = -e_V$ puisque $i = 0$ (le circuit est ouvert) et $e_H = 0$.

Numériquement $V_K - V_L = -vB_V\ell = -\dfrac{880}{3{,}6} \times 4 \cdot 10^{-5} \times 40 = -0{,}39$ V : l'extrémité L est donc chargée positivement (le vecteur $\vec{\mathcal{E}_V}$ pointe vers l'extrémité +).

b) • Les extrémités L chargée + et K chargée −, se comportent comme les armatures d'un condensateur distantes de ℓ, il apparaît donc un champ électrique (ou électrostatique) $\vec{E}$ (revoir ℳ 25) :
— de direction KL,
— de sens L vers K,
de module $E = \dfrac{|V_K - V_L|}{\ell} = vB_V = 9{,}8 \cdot 10^{-3}$ V·m^{-1}.
Ce champ électrique $\vec{E}$ est donc opposé au champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}_V}$.

E 139. *Deux conducteurs rectilignes* OA *et* OC *de même longueur sont soudés en* O, *perpendiculairement l'un à l'autre.*
Un troisième conducteur rectiligne de longueur supérieure à CA, *appuyé sur les deux premiers en* M *et* N, *est déplacé parallèlement à lui-même. Sa direction fait un angle de* 45° *avec les directions* OA *et* OC. *Le point* M *se déplace de* O *vers* A *à la vitesse constante* $v = 25$ cm·s^{-1}. *On pourra poser* $OM = x$. *A l'instant* $t = 0$, M *et* N *coincident en* O. *L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme,* $\vec{B}$, *normal au plan du circuit et d'intensité* $B = 0{,}1$ T.



a) *Établir l'expression de la surface du circuit* OMN *ainsi formé, en fonction du temps. En déduire l'expression de la f.é.m. induite dans le circuit. Quel est le sens du courant induit? (Le sens + est indiqué sur la figure.)*

b) *Préciser les caractéristiques du champ électromoteur dans* MN. *Établir l'expression de la longueur de* MN *en fonction du temps. Retrouver l'expression de la f.é.m. induite précédente.*

(D'après bac)

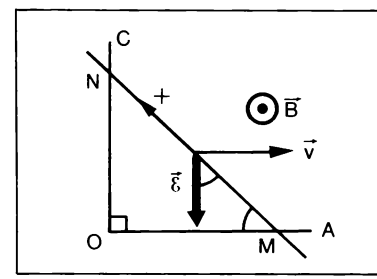
S 139. *a)* • Le circuit OMN a pour surface $S = \dfrac{OM \times ON}{2} = \dfrac{x^2}{2}$ puisque le triangle rectangle est isoscèle.
Le mouvement de M étant uniforme : $OM = x = vt$ (remarquer que l'abscisse initiale est nulle d'après le choix de $t = 0$).
Par suite $S = \dfrac{v^2 t^2}{2}$.
Le vecteur unitaire normal au circuit $\vec{u_N}$ est parallèle à $\vec{B}$, de même sens, $(\vec{u_N}, \vec{B}) = 0$.

Le flux à travers le circuit OMN, à la date t, est $\Phi = S\overrightarrow{u_N}\cdot\vec{B} = SB = \frac{v^2t^2B}{2}$.

• Le flux à travers le circuit varie, on connaît la loi de variation de Φ en fonction du temps, on peut donc évaluer la f.é.m. d'induction à chaque instant : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -v^2Bt$.

• D'après la loi de Pouillet appliquée au circuit OMN, muni du sens + indiqué, l'intensité algébrique $i = \frac{e}{R} = \frac{-v^2Bt}{R}$ (en désignant par R la résistance du circuit à la date t).
Comme v^2, B, t et R sont des nombres positifs, i est négatif. Le courant circule dans le sens négatif.
(Vous pourrez vérifier que la force de Laplace due à i, $\vec{F} = |i|\overrightarrow{NM} \wedge \vec{B}$ tend à s'opposer au déplacement de MN conformément à la loi de Lenz.)

b) • Le conducteur MN étant en translation dans un champ magnétique uniforme le champ électromoteur d'induction $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ est le même en tous ses points, il donne naissance a une f.é.m. d'induction, mesurée positivement dans le sens + M vers N dans MN, $e = \vec{\mathcal{E}}\cdot\overrightarrow{MN}$.
$\vec{\mathcal{E}}$ perpendiculaire à $\vec{B}$ est dans le plan de la figure;
$\vec{\mathcal{E}}$ perpendiculaire à $\vec{v}$ est parallèle à OC.



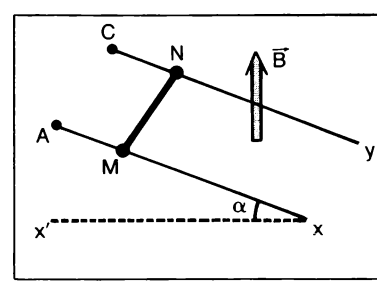
Le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{\mathcal{E}})$ étant direct, $\vec{\mathcal{E}}$ a le sens C vers O. Le module de $\vec{\mathcal{E}}$ est $\mathcal{E} = v\cdot B|\sin(\vec{v}, \vec{B})| = vB$.

• Dans le triangle rectangle isocèle $MN = x\sqrt{2} = vt\sqrt{2}$.

• La f.é.m. d'induction $e = \vec{\mathcal{E}}\cdot\overrightarrow{MN} = \mathcal{E}\cdot MN\cdot\cos(\vec{\mathcal{E}}, \overrightarrow{MN})$. Comme $(\vec{\mathcal{E}}, \overrightarrow{MN}) = 135°$, $\cos(\vec{\mathcal{E}}, \overrightarrow{MN}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Par suite $e = vB \times vt\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -v^2Bt$, on retrouve l'expression établie au *a)*.

E 140. *Une barre conductrice peut glisser le long de deux rails* Ax *et* Cy *parallèles, inclinés de* $\alpha = 10°$ *par rapport à l'horizontale. La barre est en contact avec les rails en* M *et en* N, MN *reste toujours perpendiculaire aux rails, la longueur de* MN *est* $\ell = 0{,}2$ m. *La masse de la barre est* $m = 20$ g. *L'intensité du champ de pesanteur est* $g = 9{,}8\ N\cdot kg^{-1}$. *Les frottements sont négligeables. Le dispositif est baigné par un champ magnétique uniforme,* $\vec{B}$, *vertical, ascendant, de module* $B = 0{,}6$ T.



a) *On relie* A *à* C *par un résistor de résistance* R = 0,15 Ω, *la résistance des rails et de la barre est négligeable devant* R.
La barre glisse à la vitesse $\vec{v}$, *parallèle à* Ax, *de sens* A *vers* x.

α) *Quel est le sens du courant induit dans le circuit* AMNC ?

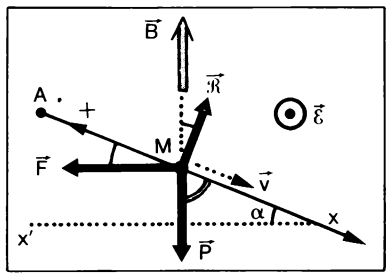
β) *Exprimer l'intensité du courant induit en fonction de* v.

γ) *Exprimer en fonction de* v, *la mesure algébrique* $\bar{a}$ *du vecteur accélération* $\vec{a}$ *de la barre suivant l'axe* Ax.

δ) *Pour quelle valeur de* v, $\bar{a}$ *devient-elle nulle? Que devient alors le mouvement de la barre?*

b) *On supprime le résistor reliant* A *et* C : *la barre glisse vers le bas. Que peut-on dire de son mouvement?*

S 140. *a*) • Présentation de la démarche : MN en mouvement dans le champ magnétique est baigné par un champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$; ce champ met en mouvement les porteurs de charge, il apparaît un courant induit dans le circuit fermé (C-résistor-A-M-N).



α) Pour déterminer sans calcul le sens du courant induit, on peut (revoir ℳ 55) partir du champ électromoteur ou bien de la loi de Lenz.
— Le champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$.
$\vec{\mathcal{E}}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{B}$ donc au plan de la figure ci-contre, il est donc parallèle à MN.
$\vec{\mathcal{E}}$ est tel que le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{\mathcal{E}})$ soit direct : $\vec{\mathcal{E}}$ a le sens N vers M. Comme la seule f.é.m. du circuit est localisée dans MN, le courant a le sens de $\vec{\mathcal{E}}$ (voir fin de ℳ 58) : il parcourt le circuit dans le sens N-M-A-C.
— La loi de Lenz. Le courant induit d'intensité en valeur absolue |i| donne naissance à une force de Laplace $\vec{F}$ qui tend à freiner le déplacement de la barre. Cette force $\vec{F}$ a pour expression $\vec{F} = |i| \vec{\ell} \wedge \vec{B}$, le vecteur $\vec{\ell}$ étant parallèle à MN, de norme ℓ, de sens celui du courant dans MN. Comme $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{\ell}$, $\vec{F}$ est dans le plan de la figure. Comme $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, $\vec{F}$ est horizontale, parallèle à xx'. D'après la loi de Lenz $\vec{F}$ pour freiner la barre doit être de sens x vers x'. Le trièdre $(\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F})$ étant direct, l'index pointant dans le sens de $\vec{B}$, le majeur dans le sens de $\vec{F}$, le pouce de la main droite donne le sens de $\vec{\ell}$ donc du courant : $\vec{\ell}$ a le sens de N vers M, le courant circule dans le circuit dans le sens N-M-A-C.
Pour la suite retenons que l'expression vectorielle de $\vec{F} = |i| \cdot \overrightarrow{NM} \wedge \vec{B}$ ①.

β) • Nous avons déjà montré que le champ électromoteur dans MN est parallèle à MN de sens N vers M. Son module est égal à : $\mathcal{E} = v \cdot B \left|\sin(\vec{v}, \vec{B})\right|$.
L'angle $(\vec{v}, \vec{B}) = 90° + \alpha$, $\sin(90° + \alpha) = \cos \alpha$, par suite $\mathcal{E} = vB \cos \alpha$.

• Le champ $\vec{\mathcal{E}}$ étant le même pour tous les points de MN, la f.é.m. dans MN orienté positivement de N vers M est :

$$e_{NM} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{NM} = \mathcal{E}\ell = vB\ell \cos \alpha.$$

• L'intensité du courant induit dans le circuit, le sens + étant de N vers M dans NM, est $i = \frac{e_{NM}}{R} = \frac{B\ell \cos \alpha}{R} v = 0{,}788\ v$ (u S.I.).

Remarque : on retrouve puisque $i > 0$ que le courant a le sens +, c'est-à-dire le sens N-M-A-C.

γ) • Le système est la barre MN.

• Le repère lié à la Terre est pratiquement galiléen.

• Le centre d'inertie G de la barre en translation, parallèlement à Ax, à un vecteur accélération $\vec{a}$ parallèle à Ax, de mesure algébrique $\bar{a}$ sur cet axe.

• Le système est soumis :
— à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, vertical, vers le bas;
— à la réaction $\vec{\mathcal{R}}$ due aux deux rails, perpendiculaire à ceux-ci puisque les frottements sont négligeables, vers le haut;
— à la force de Laplace $\vec{F}$ dont nous connaissons la direction et le sens. Précisons son module, d'après ① : $F = |i|\ell B\,|\sin(\vec{NM}, \vec{B})| = |i|\ell B$ puisque $\vec{NM} \perp \vec{B}$. En remplaçant i on obtient $F = \frac{\ell^2 B^2 \cos \alpha}{R} v$ ②.

• Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Sur l'axe Ax : $\overline{Px} + \overline{\mathcal{R}x} + \overline{Fx} = m\bar{a}$, soit

$$mg \sin \alpha - F \cos \alpha = m\bar{a}.$$

Il s'ensuit $\bar{a} = g \sin \alpha - \frac{F \cos \alpha}{m} = g \sin \alpha - \frac{\ell^2 B^2 \cos^2 \alpha}{mR} v.$

Numériquement $\bar{a} = 1{,}70 - 4{,}66\ v$ (uS.I.) ③.

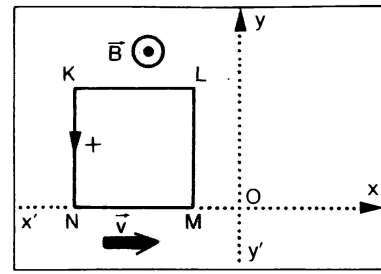
δ) • Appelons v_L la vitesse qui annule $\bar{a}$, d'après ③, $v_L = \frac{1{,}70}{4{,}66} = 0{,}36\ m \cdot s^{-1}$.

• Considérons une valeur de $v < v_L$. Pour cette vitesse $\bar{a}$ est positif, le mouvement s'effectuant dans le sens positif est donc accéléré. Par suite v croît. Si v croît, $\bar{a}$ diminue (ceci est dû au fait que la force de Laplace qui freine augmente proportionnellement à v, voir ②) : le mouvement s'accélère de moins en moins.
Pour $v = v_L$, le mouvement a atteint sa plus grande vitesse et la garde puisque $\bar{a}$ devient nul : v_L s'appelle la vitesse limite de la barre.

b) • Le circuit est ouvert, le champ électromoteur polarise les extrémités A et C, mais ne donne naissance à aucun courant induit.

• La barre n'est donc soumise qu'à son poids et à la réaction des rails (il n'y a pas de force de Laplace puisque $i = 0$), d'après le calcul du γ), alors $\bar{a} = g \sin \alpha = 1{,}70\ m \cdot s^{-2}$: le mouvement est rectiligne, uniformément varié (plus précisément uniformément accéléré).

E 141. *Un circuit carré* KLMN, *plan, a pour résistance totale* $R = 0{,}2\ \Omega$. *Ses côtés ont pour longueur* $a = 0{,}2$ m. *Il se translate, son côté* MN *restant sur l'axe fixe* x'x, *son côté* ML *restant parallèle à l'axe* y'y. *Sa vitesse* $\vec{v}$ *est constante, parallèle à* x'x, *de sens* x' *vers* x, *de module* $v = 0{,}5\ m \cdot s^{-1}$.
Dans la région de l'espace à gauche de y'y *existe un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *perpendiculaire au plan du cadre, dans la région de l'espace située à droite de* y'y *le champ magnétique est nul.* $B = 0{,}1$ T.
Le cadre est repéré par $\overline{OM} = x$.



a) *Le cadre est en mouvement dans la zone où* $x < 0$.

α) *Que peut-on dire du flux magnétique à travers le cadre? Un courant circule t-il dans le cadre?*

β) *Retrouver la conclusion précédente à l'aide du champ électromoteur.*

b) *Le cadre est en mouvement dans la zone* $0 \leqslant x < a$. *On choisit comme instant initial* $t = 0$, *l'instant où* ML *est confondu avec* y'y.

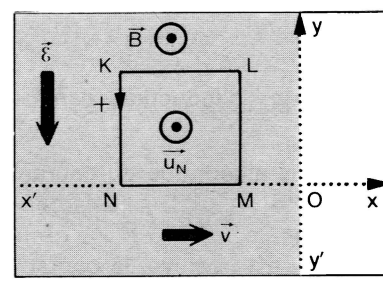
α) *Calculer le temps* t_1 *au bout duquel* KN *coincide avec* y'y.

β) *Exprimer le flux à travers le cadre et l'intensité du courant induit pendant le déplacement pour* $0 \leqslant t < t_1$.

γ) *Retrouver la conclusion précédente à l'aide du champ électromoteur.*

(D'après bac)

S 141. *a*) Dans la zone $x < 0$, le cadre est entièrement baigné par le champ magnétique $\vec{B}$.



α) Le flux à travers le cadre est $\Phi = a^2 \overrightarrow{u_N} \cdot \vec{B}$. Le vecteur unitaire normal, avec le sens + choisi, a la même direction et le même sens que $\vec{B}$: $\Phi = a^2 B$.
Le flux magnétique à travers le circuit est constant, la f.é.m. d'induction dans tout le circuit $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = 0$. Par suite aucun courant ne circule dans le cadre.

β) • Le cadre étant en translation dans un champ uniforme, le champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ est le même en tous ses points.
— Direction de $\vec{\mathcal{E}}$: $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{B}$ donc est dans le plan du cadre;
$\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{v}$ donc $\vec{\mathcal{E}} /\!/ y'y$.
— Sens de $\vec{\mathcal{E}}$: le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{\mathcal{E}})$ est direct, $\vec{\mathcal{E}}$ a donc le sens y vers y'.
— Module de $\vec{\mathcal{E}}$: $\mathcal{E} = vB\,|\sin(\vec{v}, \vec{B})| = vB$ car $\vec{v} \perp \vec{B}$.

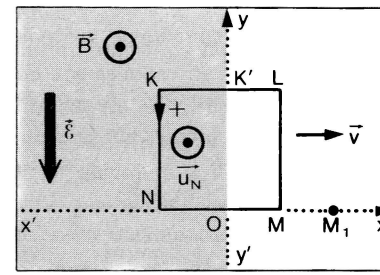
• Les f.é.m. d'induction mesurées suivant le sens + indiqués sont :
— dans ML : $e_{ML} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{ML} = -\mathcal{E}a = -vBa$;
— dans LK : $e_{LK} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{LK} = 0$ car $\vec{\mathcal{E}} \perp \overrightarrow{LK}$;
— dans KN : $e_{KN} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{KN} = +\mathcal{E}a = vBa$;
— dans NM : $e_{NM} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{NM} = 0$ car $\vec{\mathcal{E}} \perp \overrightarrow{NM}$.
D'après la loi de Pouillet appliquée au circuit sans dérivation LKNM :

$$i = \frac{e_{ML} + e_{LK} + e_{KN} + e_{NM}}{R} = 0.$$

Aucun courant ne circule dans le cadre.

• Remarque : Insistons sur le fait que la formule $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ donne la f.é.m. d'induction dans tout le circuit, au contraire $e_{MN} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{MN}$ ne donne la f.é.m. que dans MN.

b) Dans la zone considérée seule la partie du cadre située à gauche de y'y est baignée par le champ magnétique.



α) Pour que KN sorte du champ magnétique il faut que M soit arrivé en M_1 tel que $\overline{OM_1} = a$. Le mouvement de M étant rectiligne uniforme, $\overline{OM} = x = vt$ (remarquer que l'abscisse initiale est nulle étant donné le choix de l'origine des dates $t = 0$). Par suite KN sort du champ à la date $t_1 = \frac{a}{v} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$ s.

β) • A la date $0 \leqslant t < t_1$, $OM = vt$, $ON = a - vt$. La surface du cadre baignée par le champ (surface du rectangle K'KNO) est $S = a(a - vt)$.
• Le flux à travers le circuit à la date t est

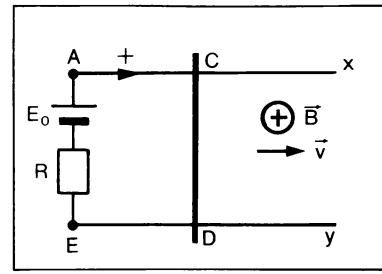
$$\Phi = a(a - vt)\,\vec{u_N} \cdot \vec{B} = a(a - vt)\,B = a^2B - avBt.$$

• La f.é.m. d'induction dans tout le circuit $e = -\frac{d\Phi}{dt} = +avB$: elle est constante.
L'intensité algébrique du courant induit est donc elle aussi constante et vaut
$i = \frac{e}{R} = \frac{avB}{R} = +0{,}05\ A = +50\ mA$.
Comme i est positive, le courant induit circule dans le sens positif LKNM.

γ) • Le champ électromoteur n'existe que pour les points du cadre appartenant au fil K'KNO. Le champ électromoteur pour ces points a les mêmes caractéristiques qu'en a *β*).
• Les f.é.m. d'induction mesurées suivant le sens + indiqué sont :
— dans K'K : $e_{K'K} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{K'K} = 0$ car $\vec{\mathcal{E}} \perp \overrightarrow{K'K}$.
— dans KN : $e_{KN} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{KN} = \mathcal{E} \cdot KN = vBa$.
— dans NO : $e_{NO} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{NO} = 0$ car $\vec{\mathcal{E}} \perp \overrightarrow{NO}$.
• D'après la loi de Pouillet dans le circuit LKNM :

$$i = \frac{e_{K'K} + e_{KN} + e_{NO}}{R} = \frac{vBa}{R} = 0{,}05\ A.$$

E 142. *Deux rails horizontaux* Ax *et* Ey *sont reliés entre* A *et* E *à un générateur de f.é.m.* $E_0 = 24$ V, *de résistance interne négligeable, protégé par un résistor de résistance* $R = 10\ \Omega$ *placé en série.*
Une tige de cuivre, perpendiculaire aux rails, peut glisser sans frottement sur ceux-ci. Elle est en contact électrique avec les rails en C *et* D, *la distance* $CD = \ell = 0{,}1$ m. *La résistance électrique des rails et de* CD *est négligeable devant* R. *L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme,* $\vec{B}$, *vertical, vers le bas, de module* $B = 0{,}1$ T.



a) *A la date* $t = 0$, *la barre est immobile.*

α) *Quelle est l'intensité* i_0 *du courant circulant dans le circuit muni du sens* + *indiqué?*

β) *Quelles sont les caractéristiques de la force de Laplace* $\vec{F}_0$ *sur* CD.

b) *La barre sous l'action de la force de Laplace prend de la vitesse, à la date* t *son vecteur vitesse est* $\vec{v}$, *parallèle à* Ax, *de sens* A *vers* x.
Exprimer en fonction de v :

α) *la f.é.m. d'induction dans* CD;

β) *l'intensité du courant dans le circuit;*

γ) *le module de la force de Laplace sur* CD.

δ) *jusqu'à quelle vitesse peut-on, à* 1% *près, négliger le phénomène d'induction dans le calcul de la force de Laplace?*

S 142. *a*) • Puisque la barre est immobile à la date $t = 0$, le champ électromoteur d'induction dans tout le circuit est nul, la seule f.é.m à considérer est celle du générateur permanent. Ce dernier ayant tendance à envoyer un courant dans le sens +, sa f.é.m. algébrique $e_0 = +E_0$ (revoir $\mathcal{M}$ 53). D'après la loi de Pouillet appliquée au circuit ACDE : $i_0 = \frac{e_0}{R} = \frac{24}{10} = 2{,}4$ A. Le courant circule dans le sens +.

β) • La force de Laplace (ou électromagnétique) $\vec{F}_0 = |i_0| \cdot \overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}$.
— Direction : $\vec{F}_0 \perp \vec{B}$ est dans le plan de la figure;
$\vec{F}_0 \perp \overrightarrow{CD}$ est parallèle à E_y.
— Sens : le trièdre $(\overrightarrow{CD}, \vec{B}, \vec{F}_0)$ est direct, $\vec{F}_0$ a le sens E vers y.
— Module : $F_0 = |i_0| \cdot CD \cdot B\,|\sin(\overrightarrow{CD}, \vec{B})| = |i_0|\,\ell B = 2{,}4 \cdot 10^{-2}$ N.

b) α) • La barre en translation à la vitesse $\vec{v}$ a, en tous ses points, le même champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$.
— Direction : $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{B}$ est dans le plan de la figure;
$\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{v}$ est parallèle à CD.
— Sens : le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{\mathcal{E}})$ étant direct, $\vec{\mathcal{E}}$ a le sens D vers C.
— Module $\mathcal{E} = vB\,|\sin(\vec{v}, \vec{B})| = vB$ puisque $\vec{v} \perp \vec{B}$.
• Il prend naissance dans CD une f.é.m. d'induction $e_{CD} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{CD} = -\mathcal{E} \cdot CD = -vB\ell$.

β) Dans le circuit existent deux f.é.m. : $e_0 = E_0$ due au générateur, $e = -vB\ell$ due au déplacement de CD dans le champ magnétique. D'après la loi de Pouillet :

$$i = \frac{e_0 + e}{R} = \frac{E_0 - vB\ell}{R} = 2{,}4 - 10^{-3}\,v \quad (\text{uS.I.}).$$

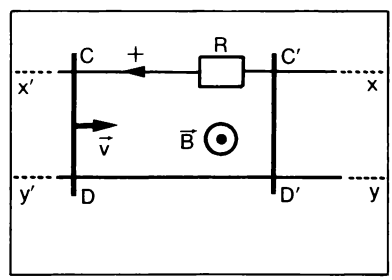
γ) La force de Laplace $\vec{F}$ a pour module $F = |i|\,\ell B = 2{,}4 \cdot 10^{-2} - 10^{-5}\,v$ (uS.I.).

δ) La f.é.m. induite fait diminuer l'intensité du courant et la force de Laplace. Cette dernière diminue de $F_0 - F = 10^{-5}\,v$ (uS.I.).

Tant que $\frac{F_0 - F}{F_0} \leqslant \frac{1}{100}$, on peut négliger le phénomène d'induction. Cela implique $\frac{10^{-5}\,v}{2{,}4 \cdot 10^{-2}} \leqslant \frac{1}{100}$, soit $v \leqslant 24\ m \cdot s^{-1}$.

Remarque : Supposons que v puisse augmenter sans restrictions techniques (longueur des rails, étendue du champ magnétique, frottements négligeables), il arriverait que pour une certaine vitesse limite v_L, F devienne nulle. (Pour cette expérience $v_L = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-2}}{10^{-5}} = 2\,400\ m \cdot s^{-1}$!). Alors le mouvement deviendrait uniforme.

E 143. *Soit le montage schématisé ci-contre, il comprend :*
— un rail horizontal y'y;
— un rail horizontal x'x comportant une portion résistante de résistance $R = 0{,}25\ \Omega$;
— une tige CD, *en appelant* C *et* D *les points de contact avec les rails;*
— une tige C'D'; $C'D' = CD = \ell = 0{,}12$ m.
L'ensemble est baigné par un champ magnétique uniforme, vertical, ascendant, de mesure $B = 0{,}15$ T. *On néglige toutes les résistances devant* R. *On néglige les frottements sur les parties mobiles.*



a) *La tige* C'D' *est maintenue fixe. On imprime à la tige* CD *un mouvement de translation, tel que* CD *reste perpendiculaire au rail, de vecteur vitesse* $\vec{v}$ *parallèle à* x'x, *de sens* x' *vers* x, *de module* $v = 6\ m \cdot s^{-1}$.

α) *Quelle est l'intensité du courant induit dans le circuit* CC'D'D?

β) *Quelles sont les caractéristiques de la force de Laplace agissant sur* C'D'?

γ) *Quelle force horizontale* $\vec{T}$ *doit-on appliquer à* CD?

δ) *Quelle est la puissance de* $\vec{T}$. *La comparer à la puissance électrique dissipée par effet Joule dans* R, *conclure.*

b) *La tige* CD *ayant le mouvement précédent, on laisse la tige* C'D' *libre de glisser sur les rails en restant perpendiculaire à ceux-ci.*

α) *Dans quel sens se déplace-t-elle?*

β) *Exprimer l'intensité du courant induit en fonction de la vitesse* v' *acquise par* C'D'.

γ) *Pour quelle valeur de* v' *l'intensité du courant induit est-elle nulle? Que devient alors le mouvement de* C'D'?

S 143. *a*) (Pour cette partie nous ne donnons que les réponses.)

α) $i = \dfrac{vB\ell}{R} = 0{,}432$ A, courant dans le sens +.

β) $F_{D'C'} = |i| \cdot \overrightarrow{D'C'} \wedge \vec{B}$: parallèle aux rails, sens x′ vers x, module $F_{D'C'} = \dfrac{\ell^2 B^2 v}{R} = 7{,}78 \cdot 10^{-3}$ N.

γ) $\vec{T}$, opposée à la force de Laplace $\overrightarrow{F_{CD}}$ sur CD, est parallèle aux rails, a le sens de $\vec{v}$, a pour module $T = \dfrac{\ell^2 B^2 v}{R} = 7{,}78 \cdot 10^{-3}$ N.

δ) • La puissance de $\vec{T}$ est $\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v} = \dfrac{\ell^2 B^2 v^2}{R} = 4{,}67 \cdot 10^{-2}$ W.

• La puissance dissipée par cet effet Joule dans R : $\mathcal{P}\text{cal} = Ri^2 = \dfrac{\ell^2 B^2 v^2}{R} = \mathcal{P}$.

Conclusion : il y a transformation de la puissance mécanique $\mathcal{P}$ en puissance électrique qui se dissipe par effet Joule.

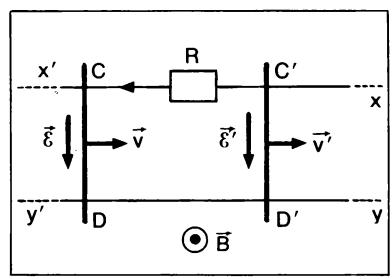
b) α) • Sous l'action de la force de Laplace $\overrightarrow{F_{C'D'}}$ la tige C′D′ se met en mouvement vers la droite.

β) (Rédaction abrégée.)

— Dans CD, $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ est parallèle à CD, de sens C vers D, de module vB; $e_{CD} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{CD} = vB\ell$.

— Dans C′D′, $\vec{\mathcal{E}'} = \vec{v'} \wedge \vec{B}$ est parallèle à C′D′, de sens C′ vers D′, de module v′B; $e_{D'C'} = \vec{\mathcal{E}'} \cdot \overrightarrow{D'C'} = -v'B\ell$.

— D'après la loi de Pouillet dans C′CDD′ :



$$i = \frac{e_{CD} + e_{D'C'}}{R} = \frac{B\ell(v - v')}{R} = 7{,}2 \cdot 10^{-2}(6 - v') \text{ en u S.I.}$$

γ) • Le courant induit s'annule pour $v' = v = 6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

• Quand v′ a atteint cette vitesse limite, la force de Laplace sur C′D′ s'annule (puisque i = 0). La tige C′D′ n'est plus soumise qu'à son poids $\vec{P}$ et à la réaction des deux rails $\vec{\mathcal{R}}$, verticale, vers le haut, puisque les frottements sont négligés. Ces deux forces se compensant, la tige C′D′ a alors un mouvement de translation rectiligne horizontale uniforme.

E 144. *(A ne faire que lorsque vous aurez étudié les intégrales.)*
Une barre OLMN, *coudée à angle droits en* L *et en* M, *peut tourner autour de sa partie verticale* OL. *La longueur de sa portion horizontale* LM *est* a = 30 cm. *L'extrémité* N *touche une nappe de mercure. Le générateur* G (*de f.é.m.* E = 1,2 V) *fait ainsi passer un courant dans le circuit* (G, O, L, M, N, *mercure*, G) *de résistance totale* R = 3 Ω. *L'ensemble est baigné par un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$, *vertical, vers le bas, de module* B = 0,8 T.

a) *La barre coudée est maintenue immobile, quel est le moment total des forces électromagnétiques qui agissent sur elle. On lâche la barre, dans quel sens se met-elle à tourner?*

b) *A un instant* t, *la barre a la vitesse angulaire* ω $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. *Exprimer en fonction de* ω :

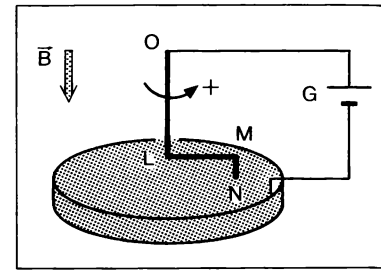
α) *le champ électromoteur dans* MN *et la f.é.m. d'induction dans* MN;

β) *le champ électromoteur* $\mathcal{E}_x$ *en un point* P *de* LM, *situé à la distance* x *de* L;

γ) *la f.é.m. d'induction* de_x *dans la portion* PP′ *de fil* LM *comprise entre* x *et* x + dx (dx, *distance infiniment petite*);

δ) *la f.é.m.* e_{LM} *dans* LM;

ε) *l'intensité qui parcourt le circuit.*

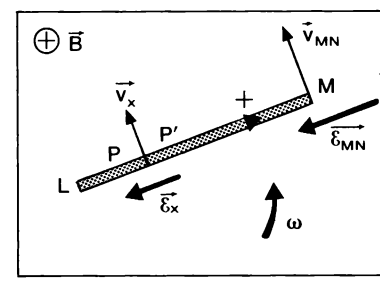


c) *A quelle vitesse limite la barre tourne-t-elle si on néglige les frottements?*

S 144. *a*) Réponse : $\overrightarrow{F_{OL}} = \vec{0}$; $\overrightarrow{F_{MN}} = \vec{0}$; $\overrightarrow{\mathcal{M}_{F_{LM}}} = \dfrac{Ea^2B}{2R} = 1{,}44 \cdot 10^{-2}$ N·m; la barre se met à tourner dans le sens + indiqué sur la figure. (Remarquer que la barre étant immobile, il n'apparaît pas de f.é.m. d'induction, le courant n'est dû qu'au générateur G.)

b) α) Réponse : $\overrightarrow{\mathcal{E}_{MN}} = \overrightarrow{v_{MN}} \wedge \vec{B}$, donc $\overrightarrow{\mathcal{E}_{MN}}$ est parallèle à ML, de sens M vers L, de module aωB.

$$e_{MN} = \overrightarrow{\mathcal{E}_{MN}} \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$$



β) • Le vecteur vitesse du point P, d'abscisse x, est un vecteur $\vec{v}_x$ perpendiculaire à LM, de module $v_x = x\omega$.
• Le champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}}_x$, en P, est $\vec{\mathcal{E}}_x = \vec{v}_x \wedge \vec{B}$, il pointe vers L et a pour module $\mathcal{E}_x = x\omega B$.

γ) Entre P et P′, le champ électromoteur est pratiquement uniforme, égal à $\vec{\mathcal{E}}_x$. Par suite la f.é.m. $de_x = \vec{\mathcal{E}}_x \cdot \overrightarrow{PP'} = -x\omega B\, dx$.

δ) La f.é.m. d'induction dans LM, $e_{LM} = \int_0^a de_x = \int_0^a -x\omega B\, dx$, par suite :

$$e_{LM} = -\omega B \int_0^a x\, dx = -\omega B \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{-\omega B a^2}{2}.$$

ε) Prenons le sens + dans le sens OLMN, la f.é.m. algébrique e_G du générateur G est égale à sa f.é.m. E.
D'après la loi de Pouillet :

$$i = \frac{e_G + e_{LM} + e_{MN}}{R} = \frac{E - \dfrac{\omega B a^2}{2}}{R}.$$

c) Au fur et à mesure que ω croît i diminue et tend vers zéro. Lorsque $E = \dfrac{\omega B a^2}{2}$, c'est-à-dire pour $\omega = \dfrac{2E}{Ba^2} = 33{,}3$ rad·s^{-1}, alors i = 0.
Le moment des forces électromagnétiques devient nul : si on néglige les frottements le mouvement devient uniforme.

POURQUOI ?

• *Quand faut-il utiliser la loi de Lenz?*

D'abord, il ne faut pas l'oublier, la loi de Lenz s'applique lorsqu'il y a un courant induit, donc quand le circuit est fermé.
On doit utiliser la loi de Lenz lorsque l'énoncé demande de déterminer sans calcul le sens du courant induit (le vecteur champ électromoteur permet dans certains cas de répondre aussi à la question, voir fin de ℳ 58).

• *Quand un énoncé dit que* I (*ou* B, *ou* Φ) *décroît régulièrement, que faut-il entendre?*

Nous l'avons déjà précisé lors d'une correction : on admet alors que loi de variation de I est une fonction affine du temps, ce qui permet d'assimiler la dérivée $\frac{dI}{dt}$ et le taux de variation $\frac{\Delta I}{\Delta t}$.

• *Faut-il présenter qualitativement l'expérience comme vous le faites?*

Certains énoncés le demandent explicitement.
Si nous commençons très souvent nos corrections de problèmes par « Présentation de la démarche » (voir ℳ 18) ou par « Présentation qualitative » c'est pour vous apprendre à dominer le problème, à avoir le sens physique, à concevoir le modèle qu'il ne vous restera plus ensuite qu'à mathématiser.
Pour répondre à votre question, nous pensons qu'il sera apprécié que vous présentiez qualitativement le phénomène avant de vous « lancer » dans les calculs.

• *Dans certains énoncés, on ne précise pas toujours « calculer la f.é.m. moyenne d'induction », on dit « calculer la f.é.m. d'induction », comment le savoir?*

Si vous ne pouvez pas déterminer la loi de variation du flux en fonction du temps, il faut se contenter de raisonner à partir des variations, c'est-à-dire de faire une évaluation moyenne.
Cette évaluation moyenne n'a pas toujours de l'intérêt. Exemple : « on fait tourner un cadre baigné par un champ magnétique, de 1 tour en δt... » Vous trouverez $\delta\Phi = 0$, donc $e_{moyen} = 0$, n'en concluez pas qu'il n'y a pas eu de phénomène d'induction (revoir E 131).

Quand doit-on considérer le flux magnétique à travers un circuit, quand doit-on considérer le champ électromoteur d'induction?

En Terminale, on ne définit que le flux magnétique « à travers » un circuit, cela nécessite donc que le circuit soit fermé ou presque fermé (un circuit ayant son interrupteur levé doit être considéré pour le calcul du flux comme pratiquement fermé). Parler de flux magnétique à travers un circuit « très ouvert » (par exemple une tige conductrice isolée électriquement) n'a pas de sens.

Pour nous, la formule $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ $\left(\text{ou } e = -\frac{\delta\Phi}{\delta t}\right)$ s'appliquera pour tout circuit fermé (ou presque fermé) que le phénomène d'induction provienne :
— du mouvement du circuit, ou de sa déformation, dans un champ magnétique constant;
— de la variation d'un champ magnétique baignant le circuit fixe.

• Le champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ (ou $\overrightarrow{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B}$) nécessite que le circuit, qu'il soit « très ouvert » ou fermé, ait au moins une partie, qui pour nous sera rectiligne, en mouvement dans un champ magnétique.

• *Lorsque nous avons étudié le mouvement d'un cadre* (*voir* E 110) *dans un champ magnétique uniforme, nous n'avons pas tenu compte du courant induit qui prend naissance, est-ce important?*

Lorsque le cadre tourne dans un champ magnétique uniforme, le flux magnétique à travers le cadre varie. Il apparaît donc une f.é.m. d'induction donnant naissance à un courant induit si le circuit est fermé. Ce courant induit à tendance à freiner le cadre (d'après la loi de Lenz). Sous l'action de ce freinage et des forces de frottement, le cadre s'équilibre après quelques oscillations amorties.
Le cadre équilibré, le courant induit n'existe plus : il n'intervient donc pas dans la condition d'équilibre que nous avons donnée.

• *Si j'ai bien compris* ℳ 54, 1, *dès qu'à la lecture du problème je me rends compte que le flux extérieur varie, je suppose que c'est le phénomène d'induction qui est prépondérant (je ne tiens pas compte du flux propre qui existe si le circuit est fermé).*

Oui c'est le modèle simplificateur qui est de règle dans les problèmes, niveau baccalauréat. Vous ne devez tenir compte du flux propre que lorsque c'est le seul à varier : c'est ce que nous allons faire dans le prochain chapitre.
(Nous avons souvent constaté que des élèves avaient des idées claires sur l'induction tant qu'ils n'avaient pas étudié l'auto-induction, ensuite c'était la confusion entre les deux phénomènes. C'est pour cette raison que nous avons distingué les deux phénomènes dès le début de ce chapitre).

11 L'AUTO-INDUCTION.

E 145. *Un solénoïde a pour rayon moyen* $r_S = 3$ cm, *pour longueur* $\ell_S = 0{,}60$ m. *Il comprend* $N = 400$ *spires. Il a été obtenu à partir d'un fil, de rayon constant* $r_f = 0{,}5$ mm, *en alliage de résistivité* $\rho = 5 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$.

a) *On envoie dans le solénoïde muni d'un sens +, un courant d'intensité* i *négative. Exprimer en fonction de* N, r_S, ℓ_S *et* i *le flux propre à travers le circuit, en déduire l'expression de son auto-inductance* L *en fonction de* N, r_S *et* ℓ_S. *Calculer* L.

b) *Calculer la résistance du solénoïde.*

c) *On débobine le fil. On le rebobine de façon à ce que les spires soient jointives et que leur rayon moyen soit* $r'_S = 2$ cm. *Il y a une seule couche de spires. L'isolant qui gaine l'alliage a pour épaisseur* 0,1 mm.
Calculer l'auto-inductance et la résistance du nouveau solénoïde.

d) *Comment faudrait-il bobiner le fil pour obtenir un bobinage de même résistance mais d'auto-inductance pratiquement nulle?*

M 59 Auto-inductance d'un circuit.

• Un circuit parcouru par un courant d'intensité algébrique i, crée en chaque point de l'espace un champ magnétique $\vec{B}$, proportionnel à $|i|$ si le circuit est loin de toute substance ferromagnétique. Il s'ensuit que le flux propre Φ_0 est proportionnel à $|i|$. Si Φ_0 et i sont mesurés à l'aide du même sens +, le coefficient de proportionnalité L, appelé auto-inductance de circuit, est un nombre positif :

$$\Phi_0 = Li \quad \text{avec} \quad L > 0.$$

L'auto-inductance L se mesure en henry (H) dans le système d'unités internationales.

• Pour un solénoïde long, dont l'intérieur est de l'air ou du vide,

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell_S}$$

(N : nombres de spires; S surface d'une spire; ℓ_S longueur du solénoïde).

Remarques :

— Si un circuit comprend un solénoïde, l'auto-inductance du circuit est pratiquement celle du solénoïde.

— Si le solénoïde comprend un noyau de fer pur (ou « fer doux »), l'auto-inductance est beaucoup plus importante, mais L dépend alors de l'intensité du courant qui traverse le solénoïde.

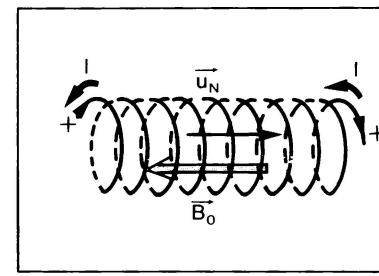
60 **Résistance d'un fil.**

Un conducteur homogène de longueur ℓ_f, de section constante s_f, constitué d'un matériau de résistivité ρ, a pour résistance :

$$R = \rho \frac{\ell_f}{s_f}.$$

(L'unité internationale de résistivité est l'ohm-mètre $\Omega \cdot m$.)

S 145. *a*) • A l'intérieur du solénoïde (de rayon très inférieur à sa longueur) le champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ est parallèle à l'axe du solénoïde, a son sens conditionné par celui du courant, a pour module $B_0 = \mu_0 \frac{N}{\ell_s} |i|$.



• Les spires, quasiment planes, ont pour vecteur unitaire $\overrightarrow{u_N}$, parallèle à l'axe du solénoïde, de sens conditionné par celui du sens +.

• Comme $i < 0$, $\overrightarrow{B_0}$ et $\overrightarrow{u_N}$ ont des sens opposés.

• Le flux propre à travers le solénoïde est :

$$\Phi_0 = N\pi r_S^2 \overrightarrow{u_N} \cdot \overrightarrow{B_0} = -N\pi r_S^2 \mu_0 \frac{N}{\ell_S} |i|.$$

Domme i est négatif, $i = -|i|$. Par suite $\Phi_0 = \frac{\mu_0 N^2 \pi r_S^2}{\ell_S} i$.

• Par définition l'auto-inductance du solénoïde est $L = \frac{\Phi_0}{i} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r_S^2}{\ell_S}$.

Application numérique $L = 9{,}47 \cdot 10^{-4}$ H.

b) • Le fil bobiné a pour longueur $\ell_f = N \times 2\pi r_S$.

• La résistance du fil, donc du solénoïde, est $R = \rho \frac{2\pi N r_S}{\pi r_f^2} = \frac{2\rho N r_S}{r_f^2} = 4{,}8\ \Omega$.

c) • Le diamètre extérieur du fil, isolant compris, est :

$$d = (0{,}1 + 0{,}5) \times 2 = 1{,}2 \text{ mm}.$$

Suivant l'axe du solénoïde chaque spire « occupe une place » $d = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ m.

• Le nouveau solénoïde comporte N′ spires de périmètre chacune $2\pi r'_S$. Comme la longueur du fil est inchangée $\ell_f = N' \times 2\pi r'_S = N \times 2\pi r_S$.

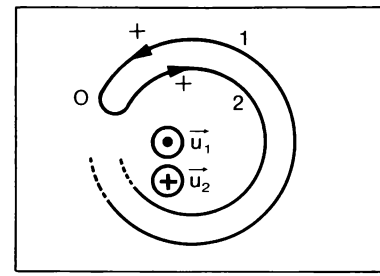
D'où $N' = N \frac{r_S}{r'_S} = 600$ spires.

• Les spires étant jointives et comme il n'y en a qu'une seule couche, la longueur du solénoïde est $\ell'_S = N'd = 600 \times 1{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}72$ m.

• La nouvelle auto-inductance est $L' = \dfrac{\mu_0 N'^2 \pi r_S'^2}{\ell'_S} = 7{,}90 \cdot 10^{-4}$ H.

• La résistance n'a pas changé, elle ne dépend pas de la façon dont le fil est bobiné (dans ℳ 60, la formule ne fait intervenir que des caractéristiques du fil).

d) On peut utiliser « l'astuce » suivante : on plie le fil en son milieu O (sans l'écraser), on enroule les deux « demi-fils » 1 et 2 pour former un bobinage double dont les deux bornes seront à l'opposé de O.

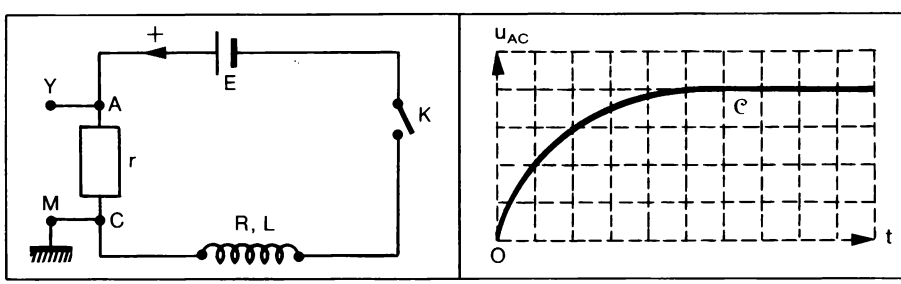


Considérons une « double spire » constituée de la spire 1 et de la spire 2. Pour 1 le sens + a le sens direct, pour 2 le sens + a le sens des aiguilles d'une montre. De ce fait les vecteurs unitaires normaux $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont opposés.

Le flux à travers une double spire qui est $\Phi_0 = S_1 \vec{u_1} \cdot \vec{B_0} + S_2 \vec{u_2} \cdot \vec{B_0}$.

Si on admet que $S_1 \simeq S_2$, $\Phi_0 = S_1(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \cdot \vec{B_0}$. Comme $\vec{u_1} + \vec{u_0} = \vec{0}$, le flux propre Φ_0 à travers une spire double est pratiquement nul. L'auto-inductance L du bobinage est donc pratiquement nulle, ce bobinage se comporte comme un résistor de résistance R.

E 146. *(Établissement d'un courant continu.)*



Le circuit schématisé comprend un générateur de f.é.m. E = 12 V, *de résistance interne négligeable, un résistor* AC *de résistance* r = 2 Ω, *un solénoïde de résistance* R *et d'auto-inductance* L.

Les bornes A *et* C *sont reliées respectivement à la voie de déviation verticale et à la masse* M *d'un oscillographe fonctionnant avec un balayage interne.*

A la date t = 0, *on abaisse l'interrupteur, la courbe* 𝒞 *qui se trace sur l'écran est photographiée. Cette courbe, qui représente les variations de* u_{AC} *en fonction du temps, est reproduite à l'échelle 1/2.*

La sensibilité verticale de la voie Y *est* 1 V/*division, la base de temps est* 0,1 s/*division.*

a) *Expliquer pourquoi le courant d'intensité* i, *mesurée suivant le sens* + *indiqué, ne s'établit pas instantanément.*

b) *Quelle est l'intensité permanente* i_p *? Quelle est alors la f.é.m. d'auto-induction* e_p *? En déduire la résistance* R *du solénoïde.*

c) *En appliquant la loi de Pouillet au circuit à l'instant* $t=0$, *lorsque* $i=0$, *évaluer la f.é.m. d'auto-induction initiale* e_0.

d) *Sachant que la tangente à la courbe* $\mathcal{C}$, *à l'origine, fait un angle* $\alpha=70{,}7°$ *avec l'axe des temps, calculer la valeur de la dérivée de* i *par rapport au temps pour* $t=0$. *En déduire* L.

e) *Quelle est la variation de flux propre entre* $t=0$ *et* $t=0{,}2$ s *?*

61 **F.é.m. d'auto-induction.**

• Un circuit d'auto-inductance L, parcouru par un courant d'intensité algébrique variable $i=f(t)$ est traversé par le flux propre variable $\Phi_0=Li$.
Le circuit est le siège d'une f.é.m. d'auto-induction :

$$e=-L\frac{di}{dt}.$$

• Conséquence : soit une bobine de résistance R, d'auto-inductance L, parcourue par un courant variable i mesuré suivant le sens + traversant la bobine de A vers B; d'après la loi d'Ohm $u_{AB}=Ri-e$; compte tenu de l'expression de la f.é.m. d'auto-induction e :

$$u_{AB}=Ri+L\frac{di}{dt}.$$

S 146. *a*) Le courant étant lancé dans le sens +, i est positif. Comme i croît, la dérivée $\frac{di}{dt}$ est positive. Il prend naissance dans le solénoïde une f.é.m. d'induction $e=-L\frac{di}{dt}$ négative. Cette f.é.m. tend à s'opposer à l'établissement du courant permanent.
Le retard est d'autant plus important que l'auto-inductance est grande.

b) • Aux bornes du résistor, le sens + entrant par A et sortant par C, la loi d'Ohm s'écrit $u_{AC}=ri$.
La courbe enregistrée représente, à la constante r près, les variations de i en fonction du temps. La valeur de u_{AC} en régime permanent est $ri_p=4$ divisions × 1 V/division = 4 V. Par suite $i_p=\frac{4}{r}=2$ A.

• Le régime permanent établi :

— la f.é.m. d'auto-induction est $e_p=-L\frac{di_p}{dt}=0$ puisque $i_p=2\,A=C^{te}$;

— d'après la loi de Pouillet, en remarquant que la f.é.m. algébrique du générateur est positive et égale à E, $i_p=\frac{E+e_p}{r+R}=\frac{E}{r+R}$.

D'où $R=\frac{E-ri_p}{i_p}=4\ \Omega$.

c) La loi de Pouillet, appliquée à la date t = 0 lorsque i est encore nulle, conduit à $i = 0 = \frac{E + e_0}{r + R}$. Par suite la f.é.m. d'auto-induction est $e_0 = -E = -12$ V.

d) • Rappelons d'abord qu'une droite passant par l'origine dans un système d'axes (Ox, Oy), d'équation y = ax, est inclinée de α par rapport à Ox tel que $\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = a$.

• La valeur de la dérivée de u_{AC} par rapport au temps, à la date t = 0, est égale au coefficient directeur a de la tangente à $\mathcal{C}$ au point O.

$$\text{tg}\,70{,}7° = \left(\frac{\text{rd}i}{\text{d}t}\right)_0 \frac{V \times 1\ \text{div} \cdot V^{-1}}{s \times 10\ \text{div} \cdot s^{-1}} = \frac{1}{10}\left(\frac{\text{rd}i}{\text{d}t}\right)_0 ; \left(\frac{\text{d}i}{\text{d}t}\right)_0 = 14{,}3\ A \cdot s^{-1}.$$

• A la date t = 0, $e_0 = -L\left(\frac{\text{d}i}{\text{d}t}\right)_0$, donc $L = \frac{-e_0}{\left(\frac{\text{d}i}{\text{d}t}\right)_0} = 0{,}839$ H.

e) Lorsque t passe de zéro à 0,2 s, $\delta t = 0{,}2$ s est représenté horizontalement par 2 divisions.
La tension u_{AC}, d'après la courbe $\mathcal{C}$, varie de :

$$\delta u_{AC} = 3\ \text{divisions} \times 1\ \text{V/division} = 3\ \text{V}.$$

Comme $i = \frac{u_{AC}}{r}$, $\delta i = \frac{\delta u_{AC}}{r} = 1{,}5$ A.
Le flux propre $\Phi_0 = Li$, varie de $\delta\Phi_0 = L \cdot \delta i = 0{,}839 \times 1{,}5 = 1{,}26$ Wb.

E 147. *(Rupture d'un courant continu.)*
Un circuit électrique comprend trois appareils placés en série :
— *un générateur de tension continue, de f.é.m.* E = 24 V, *de résistance négligeable;*
— *un interrupteur;*
— *un solénoïde de résistance* R = 4 Ω, *d'auto-inductance* L = 1,1 H.

a) *Le circuit est fermé, quelle est l'intensité* i_0 *du courant lorsque le régime permanent s'est établi?*

b) *Quelle est alors l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine?*

c) *On lève l'interrupteur, qu'observe-t-on? Expliquer.*

d) *L'intensité du courant décroît de* i_0 *à zéro en* $\delta t = 0{,}1$ s. *Quelle est la f.é.m. d'auto-induction moyenne lors de la rupture?*

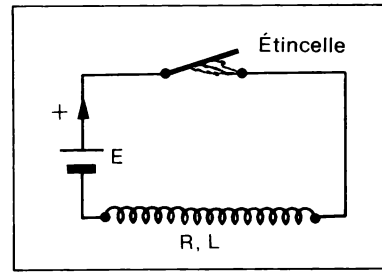
62 **Énergie magnétique.**

Une bobine d'auto-inductance L parcourue par le courant d'intensité i, a emmagasiné une énergie magnétique :

$$W_B = \frac{1}{2} Li^2.$$

S 147. *a*) Le régime permanent établi :
— l'intensité $i = i_0 = C^{te}$, par suite la f.é.m. d'auto-induction $e = -L\dfrac{di_0}{dt} = 0$;
— la seule f.é.m. du circuit est celle du générateur, positive avec le sens + choisi, égale à E.

D'après la loi de Pouillet $i_0 = \dfrac{E}{R} = 6$ A.



b) La bobine parcourue par le courant d'intensité i_0 possède en réserve l'énergie magnétique $W_B = \dfrac{1}{2}Li_0^2 = 19{,}8$ J.

c) • Lorsqu'on lève l'interrupteur, on observe une étincelle, de faible durée, reliant les deux plots de l'interrupteur.

• Interprétation par des considérations énergétiques : lorsqu'on ouvre le circuit, la bobine redonne l'énergie magnétique W_B, cette énergie se dissipe essentiellement en chaleur dans l'étincelle de rupture.

• Interprétation par des considérations sur la f.é.m. d'auto-induction : le courant a son intensité algébrique i qui décroît, par suite la dérivée $\dfrac{di}{dt}$ est négative, la f.é.m. d'auto-induction $e = -L\dfrac{di}{dt}$ est positive, elle a le même signe que celle du générateur, elle a tendance à prolonger l'existence du courant qui, le circuit étant ouvert, ne peut passer que par l'intermédiaire d'une étincelle.

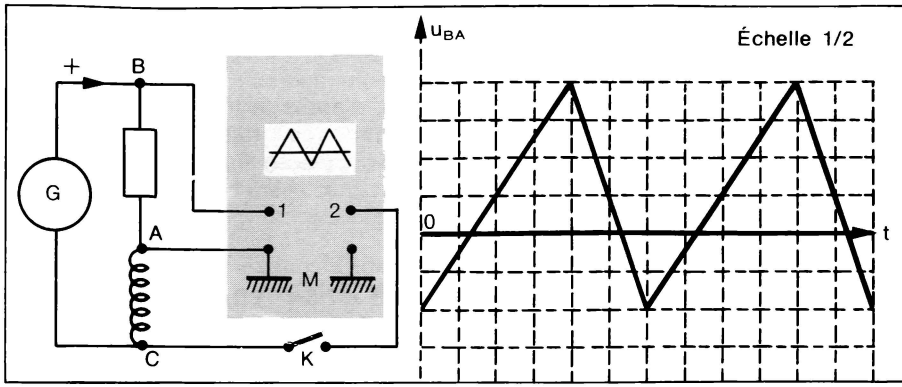
d) La f.é.m. d'auto-induction moyenne est, Φ_0 désignant le flux magnétique propre :

$$e_{moyenne} = \frac{-\delta\Phi_0}{\delta t} = -L\frac{\delta i}{\delta t}.$$

$\delta i = 0 - i_0 = -i_0 = -6$ A.
$\delta t = 0{,}1$ s.
Donc $e_{moyenne} = -1{,}1 \times \dfrac{(-6)}{0{,}1} = 66$ V.

E 148. *(Nous venons de voir que le phénomène d'auto-induction n'existe que pendant des temps très courts lorsqu'on utilise un générateur de courant continu : à l'établissement et à la rupture du courant, lorsqu'on fait varier la résistance du rhéostat. Nous allons maintenant utiliser des générateurs de courant variable.)*

Un générateur G *délivrant des signaux triangulaires est branché aux bornes d'un dipôle* BC *comprenant, disposés en série, un résistor* BA *de résistance* $R = 50\ \Omega$ *et une bobine* AC *de résistance négligeable et d'inductance* $L = 4 \cdot 10^{-2}$ H.
Les bornes A *et* B *sont reliées respectivement à la masse* M *et à la voie* 1 *d'un oscillographe bicourbe utilisé avec son balayage. La borne* C *pourra, en abaissant l'interrupteur* K, *être reliée à la voie* 2 *du même oscillographe.*

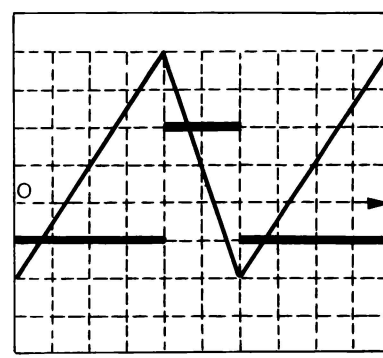


Les réglages de l'oscillographe sont tels que :
— la base de temps (commune aux voies 1 et 2) est 2 ms/*division;*
— la sensibilité verticale sur la voie 1 *est* 0,5 V/*division;*
— la sensibilité verticale sur la voie 2 *est* 0,3 V/*division.*
L'interrupteur K *étant levé on observe sur l'écran de l'oscillographe la courbe représentant* u_{BA} *en fonction du temps et la droite horizontale confondue avec l'axe* Ot, *correspondant à la trace du spot sur la voie* 2 *où* $V_2 - V_M = 0$.

a) *On abaisse l'interrupteur* K, *dessiner à l'échelle en le justifiant ce qui est visualisé sur l'écran de l'oscillographe.*

b) *Quelle est l'énergie magnétique maximale emmagasinée dans la bobine? Que peut-on dire de l'énergie magnétique aux instants* t *et* t + T, *en désignant par* T *la période du courant? Conclure.*

S 148. *a) Sur la voie* 1, la courbe représentant u_{BA} en fonction du temps n'est pas modifiée lorsqu'on abaisse l'interrupteur K (l'oscillographe de très grande résistance interne ne perturbe pas l'état de fonctionnement du circuit).



D'après la loi d'Ohm, le sens + allant dans le résistor de B vers A, $u_{BA} = Ri$.
La tension u_{BA} varie entre $+4 \times 0{,}5 = +2$ V et $-2 \times 0{,}5 = -1$ V.
Par suite i varie entre $\dfrac{+2}{50} = +4 \cdot 10^{-2}$ A et $\dfrac{-1}{50} = -2 \cdot 10^{-2}$ A.

— Pendant la croissance de i qui dure $\delta t = 4 \times 2 = 8$ ms $= 8 \cdot 10^{-3}$ s, i varie de $\delta i = 4 \cdot 10^{-2} - (-2 \cdot 10^{-2}) = 6 \cdot 10^{-2}$ A. Comme i est fonction affine du temps $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{\delta i}{\delta t} = \dfrac{6 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-3}} = 7{,}5$ A·s^{-1} (revoir ℳ 56).

— Pendant la décroissance de i qui dure $\delta t = 2 \times 2 = 4$ ms $= 4 \cdot 10^{-3}$ s, i varie de $\delta i = -6 \cdot 10^{-2}$ A, cette fois-ci $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{\delta i}{\delta t} = \dfrac{-6 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} = -15$ A·s^{-1}.

• *Sur la voie* 2, en remarquant que la borne C est reliée à la voie 2 et A à la masse, on visualise la courbe représentant les variations de u_{CA} en fonction du temps.
Le sens + traversant la bobine de A vers C, d'après la loi d'Ohm :

$$u_{AC} = ri + L\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt} \text{ puisque } r = 0.$$

Par suite $$U_{CA} = -L\frac{di}{dt}.$$

— Pendant la croissance de i, $u_{CA} = -4 \cdot 10^{-2} \times 7{,}5 = -0{,}3$ V (représenté par une division).
— Pendant la décroissance de i, $u_{CA} = -4 \cdot 10^{-2} \times (-15) = +0{,}6$ V (représenté par 2 divisions).

b) • L'énergie magnétique $W_B = \frac{1}{2}Li^2$ est maximale lorsque $|i|$ est maximale, cela se produit pour $i = 4 \cdot 10^{-2}$ A, alors $W_{B\,maxi} = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ J = 32 μJ.
• Au bout d'une période T = 12 ms, i reprend la même valeur, par suite W_B reprend la même valeur. Au cours d'une période les pertes et les gains d'énergie magnétique de la bobine se compensent.

E 149. *Un solénoïde* AC *est muni d'un sens* + *qui le traverse de* A *vers* C. *Sa résistance est* R = 0,85 Ω. *Le flux propre à travers le solénoïde varie suivant la loi* $\Phi = 3 \cdot 10^{-2}(4 - 5t)$, *en* u SI, *avec* $t \in [0; 2\,s]$.

a) *Quelle est la f.é.m. d'auto-induction?*

b) *A la date* t = 0, *la tension électrique* $(u_{AC})_0 = 0{,}7$ V, *quelle est l'auto-inductance du solénoïde?*

c) *Quelle est l'expression de* i *en fonction du temps* t *lorsque* $t \in [0; 2\,s]$?
A quel instant le courant change-t-il de sens?

d) *Quelle est l'expression de* u_{AC} *en fonction du temps dans le même intervalle?*

S 149. *a*) La f.é.m. d'auto-induction e est liée au flux propre Φ à travers le solénoide par $e = -\frac{d\Phi}{dt}$. La dérivée de $\Phi = 3 \cdot 10^{-2}(4 - 5t)$ est $-15 \cdot 10^{-2}$, par suite e = 0,15 V : la f.é.m. d'auto-induction est constante pendant l'intervalle de temps considéré.

b) • Le sens + traversant le solénoïde de A vers C, d'après la loi d'Ohm $u_{AC} = Ri - e = Ri - 0{,}15$.
Soit i_0 l'intensité à la date t = 0 :
$(u_{AC})_0 = Ri_0 - 0{,}15$, d'où $i_0 = \frac{(u_{AC})_0 + 0{,}15}{R} = 1$ A.
• A la date t = 0 le flux propre a la valeur $\Phi_0 = 3 \cdot 10^{-2}(4 - 0) = 0{,}12$ Wb.
• Par définition l'auto-inductance L du solénoide est le quotient flux propre divisé par intensité : $L = \frac{\Phi_0}{i_0} = \frac{0{,}12}{1} = 0{,}12$ H.

c) • A la date t, l'intensité a la valeur $i = \frac{\Phi}{L} = \frac{3 \cdot 10^{-2}(4 - 5t)}{0{,}12}$ soit $i = 1 - 1{,}25\,t$, en u SI.

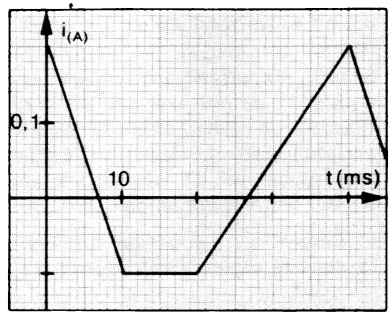
t(s)	0		0,8		2
$i_{(A)}$	1	+	0	−	− 1,5

• D'après le tableau ci-contre le courant chemine dans le sens positif ($i > 0$) pour $t < 0{,}8$ s, dans le sens négatif pour $t > 0{,}8$ s.

• A la date $t = 0{,}8$ s, l'intensité du courant est nulle et le courant change de sens de circulation.

d) La tension $u_{AC} = Ri - e$, comme $i = 1 - 1{,}25\,t$ et $e = 0{,}15$ V, $u_{AC} = 0{,}85(1 - 1{,}25\,t) - 0{,}15 = 0{,}70 - 1{,}06\,t$ en u S.I.

E 150. *Une bobine* CD *a pour résistance* $r = 1\ \Omega$ *et pour inductance* 10 mH.
Le sens + *la traverse de* C *vers* D.
Une source de courant impose un courant i *dans la bobine, d'intensité variable, de période* T = 40 ms.
Les variations de i *en fonction du temps sont représentées ci-contre.*



a) *Préciser comment varie la f.é.m. d'auto-induction, en se limitant à* $0 \leqslant t < 40$ ms.

b) *Représenter graphiquement les variations de* u_{CD} *en fonction du temps.*

S 150. *a)* • Présentation qualitative de l'expérience : le flux propre $\Phi_0 = Li$ varie avec i; la variation du flux propre entraîne l'apparition d'une f.é.m. d'auto-induction $e = -L\frac{di}{dt}$.

• Pour $0 \leqslant t < 10$ ms, i est fonction affine de t : $\frac{di}{dt} = \frac{\delta i}{\delta t}$.

Pour $\delta t = 10\ \text{ms} = 10^{-2}$ s, $\delta i = -0{,}1 - 0{,}2 = -0{,}3$ A, $\frac{di}{dt} = \frac{-0{,}3}{10^{-2}} = -30\ \text{A} \cdot \text{s}^{-1}$,

par suite $e = -L\frac{di}{dt} = -10^{-2} \times (-30) = 0{,}3$ V.

• Pour $10\ \text{ms} \leqslant t < 20$ ms, i est constant, $e = 0$.

• Pour $20\ \text{ms} \leqslant t < 40$ ms, i est fonction affine de t : $\frac{di}{dt} = \frac{\delta i}{\delta t}$.

Pour $\delta t = 20\ \text{ms} = 2 \cdot 10^{-2}$ s, $\delta i = 0{,}2 - (-0{,}1) = 0{,}3$ A, $\frac{di}{dt} = \frac{\delta i}{\delta t} = \frac{0{,}3}{2 \cdot 10^{-2}} = 15\ \text{A} \cdot \text{s}^{-1}$, par suite $e = -10^{-2} \times 15 = -0{,}15$ V.

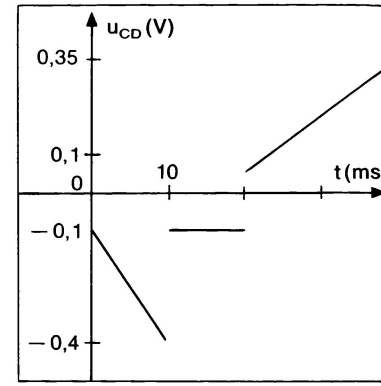
b) • Le sens + traversant la bobine de C vers D, d'après la loi d'Ohm :

$$u_{CD} = ri - e.$$

• Pour $0 \leqslant t \leqslant 10$ ms, $e = 0{,}3$ V. Déterminons la fonction affine reliant i au temps t. Cette fonction est de la forme :

$$i = at + b.$$

Pour déterminer a et b on peut écrire que pour $t = 0$, $i = 0{,}2$ A; pour $t = 10^{-2}$ s, $i = -0{,}1$ A.
On trouvera $i = -30t + 0{,}2$.
Par suite $u_{CD} = ri - e = -30t - 0{,}1$ (en u S.I.).



• Pour 10 ms $\leqslant t < 20$ ms, $i = -0{,}1$ A, $e = 0$, $u_{CD} = -0{,}1$ V.
• Pour 20 ms $\leqslant t < 40$ ms, $e = -0{,}15$ V, on trouvera que $i = 15t - 0{,}4$.
Par suite $u_{CD} = ri - e = 15t - 0{,}25$ (en u S.I.).
• Les variations de u_{CD} pendant une période sont représentées ci-contre.

E 151. *(Facultatif à ne faire que lorsque vous aurez étudié les exponentielles.) L'objectif de cet exercice est d'étudier théoriquement le circuit électrique décrit et étudié à un niveau plus élémentaire dans* E 146 *(revoir la figure). Ce circuit comprend un générateur de f.é.m.* E = 12 V, *de résistance interne négligeable, un résistor* AC *de résistance* r = 2 Ω, *une bobine dont les caractéristiques ont été déterminées dans* S 146 : *auto-inductance* L = 0,839 H *et résistance* R = 4 Ω.

a) *Déterminer l'équation différentielle du circuit, la grandeur caractéristique étant l'intensité algébrique* i (*sens* + : *traverse le résistor de* A *vers* C).

b) *Après intégration, on montre que l'équation différentielle précédente admet une solution du type* $i = A(1 - e^{\frac{-t}{\mathcal{C}}})$ (1), A *et* $\mathcal{C}$ *étant des grandeurs positives s'exprimant en fonction de variables appartenant à la liste :* E, r, R *et* L.

α) *Lorsque* t *devient très grand, le courant atteint son intensité permanente* i_p : *en déduire l'expression de* A.

β) *Vérifier que* (1) *est bien solution de l'équation différentielle du circuit, à condition de choisir convenablement* $\mathcal{C}$.

c) α) *Quelle est l'expression de* u_{AC} *en fonction du temps?*

β) *Retrouver que la tangente à l'origine des temps* t = 0 *(choisie lorsqu'on abaisse l'interrupteur) de la courbe* $\mathcal{C}$ *représentant* u_{AC} *en fonction du temps, fait l'angle* $\alpha = 70{,}7°$ *avec l'axe des temps.*

γ) *Au bout de combien de temps* u_{AC} *atteint-il* 99 % *de sa valeur permanente?*

S 151. *a*) Réponse : $(r + R)i + L\dfrac{di}{dt} = E$.

b) α) Lorsque t devient grand, le courant atteint sa valeur permanente constante i_p, alors $\dfrac{di_p}{dt} = 0$ et $i_p = \dfrac{E}{r + R}$.

D'après $i = A(1 - e^{\frac{-t}{\mathcal{C}}})$, lorsque $t \longrightarrow \infty$, $e^{\frac{-t}{\mathcal{C}}} \longrightarrow 0$ et $i \longrightarrow A$ par suite $A = i_p = \dfrac{E}{r + R}$.

$\beta)$ $i=\frac{E}{r+R}(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$, $\frac{di}{dt}=\frac{E}{r+R}\times -e^{\frac{-t}{\tau}}\times -\frac{1}{\tau}$, d'où :

$$\frac{di}{dt}=\frac{E}{(r+R)\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}.$$

Reportons dans l'équation différentielle :

$$(r+R)\frac{E}{r+R}(1-e^{\frac{-t}{\tau}})+\frac{LE}{(r+R)\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}=E.$$

Après simplification $e^{\frac{-t}{\tau}}\left(-1+\frac{L}{(r+R)\tau}\right)=0$, cette égalité devant être vérifiée quel que soit t, $-1+\frac{L}{(r+R)\tau}=0$ d'où $\tau=\frac{L}{(r+R)}$.

c) $\alpha)$ $u_{AC}=ri=\frac{rE}{r+R}(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$.

$\beta)$ $\frac{du_{AC}}{dt}=\frac{rE}{r+R}\times -e^{\frac{-t}{\tau}}\times -\frac{1}{\tau}=\frac{rE}{L}e^{\frac{-t}{\tau}}$.

Pour $t=0$, $\frac{du_{AC}}{dt}=\frac{rE}{L}=28{,}6\,\frac{V}{s}$.

L'angle α est tel que tg α est égal à $\frac{du_{AC}}{dt}$, rapport ramené en divisions sur divisions :

$$\text{tg}\,\alpha=28{,}6\,\frac{V\times 1\text{ div}\cdot V^{-1}}{s\times 10\text{ div}\cdot s^{-1}}=\frac{28{,}6\text{ div}}{10\text{ div}}=2{,}86,\text{ d'où }\alpha=70{,}7°.$$

$\gamma)$ La valeur permanente de u_{AC} est $\frac{rE}{r+R}$. Nous cherchons t tel que $\frac{rE}{r+R}(1-e^{\frac{-t}{\tau}})=0{,}99\frac{rE}{r+R}$, d'où $1-e^{\frac{-t}{\tau}}=0{,}99$ et $e^{\frac{-t}{\tau}}=0{,}01$. Par suite $-\frac{t}{\tau}=$ ln 0,01 et $t=-\frac{L}{(r+R)}$ ln 0,01.

Finalement $t=0{,}64$ s. Sur le graphique de E 146, on constate bien que la valeur permanente est pratiquement atteinte vers 0,6 s.

Remarque. Pour $t=0{,}2$ s, $u_{AC}=\frac{2\times 12}{2+4}(1-e^{-\frac{0{,}2}{\tau}})$ avec $\tau=0{,}1398$ s, on trouve $u_{AC}=3{,}04$ V : c'est ce qu'on relève sur la courbe C.

POURQUOI ?

• *Dans certains corrigés vous dites que la f.é.m. d'induction* e *est permanente et pourtant elle varie, s'annulant même à certains instants!*

On dit que la f.é.m. est permanente lorsque le phénomène d'auto-induction existe pendant toute la durée de l'expérience (pour bien différencier de ce qui se passe en courant continu où le phénomène n'existe qu'à l'établissement ou à la rupture du courant). La f.é.m. permanente peut être constante (non nulle constamment), ou variable.

• *Est-ce que les retards que l'on observe à « l'allumage » de la télévision ou d'un tube néon sont dus au phénomène d'auto-induction.*

Ce n'est pas parce qu'une lampe placée en série avec une bobine de grande auto-inductance s'allume avec un retard très facile à observer, qu'il faut considérer que tous les retards apparaissant dans les appareils alimentés à l'électricité sont dus au phénomène d'auto-induction (le retard d'apparition de l'image pour une télévision est dû au temps de chauffage du filament provoquant l'effet thermoélectronique; pour un « tube néon » il faut au préalable que la structure du mélange gazeux contenu dans le tube soit modifiée (ionisation, ...) pour que le régime permanent s'établisse).

• *Lorsqu'une bobine contient un noyau de fer doux, doit-on considérer que son auto-inductance* L *varie avec* i?

Dans un problème, niveau baccalauréat, pour une telle bobine on considère que L garde une valeur moyenne valable pour un certain domaine d'intensité du courant.

• *Que signifie « résistance pure », « inductance pure »?*

Soit un dipôle (solénoïde, bobinage) de résistance R, d'auto-inductance L.

— Si L est négligeable, on dit que le dipôle est un conducteur ohmique ou un résistor ou qu'il est purement résistif (de façon tolérée on peut dire que c'est une résistance pure ou résistance morte).

— Si R est négligeable, on dit que le dipôle est purement inductif (de façon tolérée on peut dire que c'est un inductance pure).

— S'il faut tenir compte de L et R on dit que le dipôle est inductif et résistant.

• *Quand on branche un générateur continu* (E, r) *aux bornes d'un solénoïde* (L, R), *le courant* i *qui s'établit dans le circuit dépend à la fois de la f.é.m.* E *du générateur et de la f.é.m. d'auto-induction, or cette dernière dépend de* i, *c'est un « cercle vicieux »!*

• Effectivement lorsqu'on part des f.é.m. pour calculer le courant i, le problème n'est pas simple car il faut faire des intégrations (voir éventuellement E 151).

• Dans le cas d'un générateur de tension alternative sinusoïdale, nous apprendrons comment résoudre le problème (par exemple à l'aide des vecteurs de Fresnel), c'est pour cette raison que dans ce chapitre nous n'avons pas utilisé de tels générateurs.

• Dans les problèmes de ce chapitre, pour éviter les intégrations, on part du courant qui existe dans le circuit (compte tenu de la f.é.m. d'auto-induction), ce courant étant déterminé soit par une loi $i = f(t)$, soit par une représentation graphique qui peut être un oscillogramme. De cette façon, on peut calculer facilement les f.é.m. ou les tensions.

Imprimerie Aubin, 86240 Ligugé. D.L., mai 1984. — Impr., L 16690. — Édit. 245.

Dans cette collection :

- **CHIMIE Terminales C - D - E**
- **PHYSIQUE Terminale D**

I. Mécanique - Electromagnétisme
II. Oscillations - Physique atomique

- **PHYSIQUE Terminales C - E**

I. Mécanique - Electromagnétisme
II. Oscillations - Physique atomique

ISBN 2-206-00245-0